PIERWSZA ŁAWKA · ZESTAW DZIAŁOWY · MATEMATYKA · KLASA 2 LO I TECHNIKUM · ZAKRES ROZSZERZONY

Dział 11. Wzory Viète’a, równania kwadratowe z parametrem, równania dwukwadratowe (zakres rozszerzony)

Wzory Viète’a i wyrażenia symetryczne pierwiastków (suma kwadratów, suma odwrotności, kwadrat różnicy, suma sześcianów), liczba rozwiązań równania kwadratowego z parametrem (z przypadkiem a = 0), znaki pierwiastków, pierwiastki w przedziale (interpretacja geometryczna), równania dwukwadratowe i sprowadzalne do kwadratowych przez podstawienie, zadania z parametrem w formacie etapowym CKE. Dziewięć kart: teoria z przykładami, ćwiczenia, zadania typu maturalnego, dwie kartkówki (A i B) i sprawdzian (A i B) – z kluczem i zasadami oceniania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Wzory Viète’a, równania kwadratowe z parametrem, równania dwukwadratowe (zakres rozszerzony) – najważniejsze wiadomości** Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka	4 zad. 9 pkt
2	**Wzory Viète’a, równania kwadratowe z parametrem, równania dwukwadratowe (zakres rozszerzony) – ćwiczenia** Ćwiczę umiejętności z działu	8 zad. 26 pkt
3	**Wzory Viète’a, równania kwadratowe z parametrem, równania dwukwadratowe (zakres rozszerzony) – zadania typu maturalnego** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	6 zad. 23 pkt
4	**Kartkówka 1: wzory Viète’a i równania dwukwadratowe – grupa A** 15 minut · 7 pkt	3 zad. 7 pkt
5	**Kartkówka 1: wzory Viète’a i równania dwukwadratowe – grupa B** 15 minut · 7 pkt	3 zad. 7 pkt
6	**Kartkówka 2: równania kwadratowe z parametrem – grupa A** 15 minut · 8 pkt	3 zad. 8 pkt
7	**Kartkówka 2: równania kwadratowe z parametrem – grupa B** 15 minut · 8 pkt	3 zad. 8 pkt
8	**Sprawdzian: Wzory Viète’a, równania kwadratowe z parametrem, równania dwukwadratowe (zakres rozszerzony) – grupa A** 45 minut · 21 pkt	8 zad. 21 pkt

9	**Sprawdzian: Wzory Viète'a, równania kwadratowe z parametrem, równania dwukwadratowe (zakres rozszerzony) – grupa B** 45 minut · 21 pkt	8 zad. 21 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 przypomina najważniejsze wiadomości z działu i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku – od niej warto zacząć.
- Karta 2 to ćwiczenia, a karta 3 – zadania w formule matury 2027 (polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE).
- Karty 4–7 to dwie kartkówki (po 15 minut), każda w grupach A i B. Karty 8–9 to sprawdzian (45 minut) w grupach A i B – te same typy zadań i ta sama punktacja, inne liczby.
- Klucz na końcu zestawu zawiera odpowiedzi, przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE (kamienie milowe, błąd rachunkowy = −1 pkt).
- Osobny plik „Powtórka" zbiera definicje, wzory (z zaznaczeniem, które są w karcie wzorów CKE), typowe błędy i test „Sprawdź się".

Materiał oryginalny. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: III.R3, III.R5, III.R6 (w tle III.4, V.8, III.R2); cele ogólne I, III.2, III.3, IV.4; dowody PR pkt 4. Miejsce w seriach podręczników: NE ZPiR kl. 2 (Zastosowania funkcji kwadratowej: równania sprowadzalne do kwadratowych, wzory Viète'a, parametr) · Pazdro ZR kl. 2 (Funkcja kwadratowa) · GWO ZR kl. 1 (wzory Viète'a, parametr). Nazwy wydawnictw i serii podano tylko informacyjnie – materiał nie jest z nimi powiązany. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

PIERWSZA ŁAWKA

Wzory Viète'a, równania kwadratowe z parametrem, równania dwukwadratowe (zakres rozszerzony) – najważniejsze wiadomości

Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka

KARTA 1/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 9 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Wzory Viète'a** (są w karcie wzorów CKE). Jeżeli równanie $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, ma pierwiastki x_1, x_2 (czyli $\Delta \geq 0$; dla $\Delta = 0$ przyjmujemy $x_1 = x_2$), to $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ oraz $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Najpierw sprawdź, że pierwiastki istnieją: dla $\Delta < 0$ równanie nie ma pierwiastków i wzorów Viète'a nie stosujemy.

Wyrażenie symetryczne	Zapis przez $x_1 + x_2$ i $x_1 x_2$
$x_1^2 + x_2^2$	$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$
$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ (gdy $x_1 x_2 \neq 0$)	$\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$
$(x_1 - x_2)^2$	$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \frac{\Delta}{a^2}$
$x_1^3 + x_2^3$	$(x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$
$\lvert x_1 - x_2 \rvert$	$\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a \rvert}$

- **Liczba rozwiązań równania z parametrem.** Gdy współczynnik przy x^2 zależy od parametru, najpierw rozpatrz przypadek $a = 0$ – równanie jest wtedy liniowe (jedno rozwiązanie, brak albo nieskończenie wiele). Dla $a \neq 0$: $\Delta > 0$ – dwa różne pierwiastki, $\Delta = 0$ – jeden (podwójny), $\Delta < 0$ – brak. „Dwa różne pierwiastki" to układ: $a \neq 0$ i $\Delta > 0$ (nie $\Delta \geq 0$).

Pierwiastki równania ($a \neq 0$)	Równoważny układ warunków
dwa różne dodatnie	$\Delta > 0$, $x_1 x_2 > 0$, $x_1 + x_2 > 0$
dwa różne ujemne	$\Delta > 0$, $x_1 x_2 > 0$, $x_1 + x_2 < 0$
dwa różne tego samego znaku	$\Delta > 0$, $x_1 x_2 > 0$
różnych znaków	$x_1 x_2 < 0$, czyli $\frac{c}{a} < 0$ (wtedy $ac < 0$, więc $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ samo)

- **Pierwiastki a przedział – interpretacja geometryczna.** Niech $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $x_w = -\frac{b}{2a}$. Oba (różne) pierwiastki leżą w przedziale (p, q) wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$, $a \cdot f(p) > 0$, $a \cdot f(q) > 0$ i $p < x_w < q$. Liczba k leży między pierwiastkami wtedy i tylko wtedy, gdy $a \cdot f(k) < 0$ (wtedy $\Delta > 0$ samo). Oba pierwiastki są większe od k wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$, $a \cdot f(k) > 0$ i $x_w > k$.

- **Równanie dwukwadratowe** $ax^4 + bx^2 + c = 0$: podstawiamy $t = x^2$, $t \geq 0$, i rozwiązujemy $at^2 + bt + c = 0$. Każde rozwiązanie $t > 0$ daje dwa rozwiązania $x = \pm\sqrt{t}$, $t = 0$ daje jedno ($x = 0$), a $t < 0$ – żadnego. Tak samo rozwiązujemy równania z powtarzającym się wyrażeniem, np. $(x^2 - 4x)^2 + \ldots$ – podstawiamy $t = x^2 - 4x$ (tu bez warunku $t \geq 0$).
- **Zapis na maturze (5–6 pkt).** Warunek $a \neq 0$, ponumerowany **układ warunków równoważny poleceniu** (1°, 2°, 3°…), rozwiązanie każdego warunku osobno (w nierównościach wymiernych – dziedzina), część wspólna na osi i odpowiedź. CKE przyznaje punkty za każdy rozwiązany warunek (etap), a za $\Delta \geq 0$ zamiast $\Delta > 0$ – 0 pkt za ten etap. W karcie wzorów są wzory Viète'a, Δ i wierzchołek; tabel warunków nie ma.

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. Równanie $x^2 - 5x + 3 = 0$ ma dwa pierwiastki x_1, x_2. Nie rozwiązując równania, oblicz $x_1^2 + x_2^2$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, $(x_1 - x_2)^2$ i $x_1^3 + x_2^3$.

$\Delta = 25 - 12 = 13 > 0$ – pierwiastki istnieją. Ze wzorów Viète'a: $x_1 + x_2 = 5$, $x_1x_2 = 3$.

$x_1^2 + x_2^2 = 5^2 - 2 \cdot 3 = 19$; $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{5}{3}$; $(x_1 - x_2)^2 = 5^2 - 4 \cdot 3 = 13$ (równe Δ, bo $a = 1$);

$x_1^3 + x_2^3 = 5^3 - 3 \cdot 3 \cdot 5 = 125 - 45 = 80$.

Przykład 2. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - 2(m + 1)x + m + 7 = 0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie.

Współczynnik przy x^2 jest równy 1, więc równanie jest kwadratowe. Warunki: 1° $\Delta > 0$, 2° $x_1x_2 > 0$, 3° $x_1 + x_2 > 0$.

1° $\Delta = 4(m + 1)^2 - 4(m + 7) = 4(m^2 + m - 6) = 4(m + 3)(m - 2) > 0 \Leftrightarrow m < -3$ lub $m > 2$.

2° $x_1x_2 = m + 7 > 0 \Leftrightarrow m > -7$. 3° $x_1 + x_2 = 2(m + 1) > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Część wspólna: $m \in (2, +\infty)$. (Sam warunek 2° nie wystarczy – iloczyn jest dodatni także dla dwóch pierwiastków ujemnych.)

Przykład 3. Wyznacz liczbę rozwiązań równania $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ z niewiadomą x w zależności od parametru m.

1) $m = 1$: równanie liniowe $-2x + 4 = 0$ – jedno rozwiązanie $x = 2$.

2) $m \neq 1$: $\Delta = 4m^2 - 4(m - 1)(m + 3) = 4(3 - 2m)$. $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$; $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$; $\Delta < 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$.

Odpowiedź: dwa rozwiązania dla $m \in (-\infty, 1) \cup (1, \frac{3}{2})$; jedno dla $m = 1$ lub $m = \frac{3}{2}$; brak dla $m > \frac{3}{2}$.

Podgląd • Pierwsza Ławka

Przykład 4. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których oba pierwiastki równania $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ są różne i większe od 1.

$f(x) = x^2 - 2mx + m + 2$, ramiona paraboli w górę, $x_w = m$. Warunki: 1° $\Delta > 0$, 2° $f(1) > 0$, 3° $x_w > 1$.

1° $\Delta = 4m^2 - 4(m + 2) = 4(m - 2)(m + 1) > 0 \Leftrightarrow m < -1$ lub $m > 2$.

2° $f(1) = 1 - 2m + m + 2 = 3 - m > 0 \Leftrightarrow m < 3$. 3° $m > 1$.

Część wspólna: $m \in (2, 3)$. Bez warunku 3° do odpowiedzi „weszłyby" liczby $m < -1$, dla których oba pierwiastki są mniejsze od 1.

Przykład 5. Rozwiąż równanie $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$.

Podstawiamy $t = x^2$, $t \geq 0$: $t^2 - 5t - 36 = 0$, $\Delta = 25 + 144 = 169$, $t = \frac{5 - 13}{2} = -4$ lub $t = \frac{5 + 13}{2} = 9$.

$t = -4 < 0$ odrzucamy. $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3$ lub $x = 3$. Odpowiedź: $x \in \{ -3, 3 \}$.

ZADANIA

Zadanie 1. Oba równania mają po dwa pierwiastki. Uzupełnij, korzystając ze wzorów Viète'a.

___ / 4 pkt

1. $2x^2 - 6x - 5 = 0$: $x_1 + x_2 =$ _____

2. $2x^2 - 6x - 5 = 0$: $x_1x_2 =$ _____

3. $x^2 + 4x - 1 = 0$: $x_1 + x_2 =$ _____

4. $x^2 + 4x - 1 = 0$: $x_1x_2 =$ _____

Zadanie 2. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

___ / 3 pkt

1. Równanie $x^2 - 4x + 6 = 0$ ma dwa pierwiastki, których suma jest równa 4.	**P**	**F**
2. Pierwiastki równania $3x^2 + 2x - 8 = 0$ są liczbami różnych znaków.	**P**	**F**
3. Jeżeli $x_1 + x_2 = 3$ i $x_1x_2 = 1$, to $x_1^2 + x_2^2 = 7$.	**P**	**F**

Zadanie 3. Liczba wszystkich rozwiązań rzeczywistych równania $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ jest równa

___ / 1 pkt

A. 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 1

Zadanie 4. Równanie $x^2 - 8x + c = 0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy

___ / 1 pkt

A. $c \in (-\infty, 16)$ **B.** $c \in (0, +\infty)$

C. $c \in (0, 16)$ **D.** $c \in (0, 16)$

Podgląd • Pierwsza Ławka

Wzory Viète'a, równania kwadratowe z parametrem, równania dwukwadratowe (zakres rozszerzony) – ćwiczenia

KARTA 2/9

Ćwiczę umiejętności z działu

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 26 pkt

Zadanie 1. Równanie $x^2 - 6x + 2 = 0$ ma pierwiastki x_1, x_2. Nie rozwiązując równania, oblicz.

___ / 4 pkt

1. $x_1^2 + x_2^2 =$ _____

2. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} =$ _____

3. $(x_1 - x_2)^2 =$ _____

4. $x_1^3 + x_2^3 =$ _____

Zadanie 2. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 + (m - 3)x + m = 0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne.

___ / 3 pkt

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $(m + 2)x^2 - 4x + m - 3 = 0$ ma dwa pierwiastki różnych znaków. Wyjaśnij, dlaczego nie trzeba sprawdzać warunku $\Delta > 0$.

___ / 2 pkt

Kartkówka 2: równania kwadratowe z parametrem – grupa A

KARTA 6/9

15 minut · 8 pkt

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

Zadanie 1. Równanie $x^2 + 6x + m = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy ___ / 1 pkt

A. $m < 9$ **B.** $m \leq 9$ **C.** $m > 9$ **D.** $m < 36$

Zadanie 2. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $(m + 1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - 2(m - 2)x + m = 0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie. Zapisz obliczenia. ___ / 4 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Kartkówka 2: równania kwadratowe z parametrem – grupa B

15 minut · 8 pkt

KARTA 7/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

Zadanie 1. Równanie $x^2 - 10x + m = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy

___ / 1 pkt

A. $m \leq 25$ **B.** $m > 25$ **C.** $m < 25$ **D.** $m < 100$

Zadanie 2. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $(m-1)x^2 + 2mx + m + 4 = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Zapisz obliczenia.

___ / 3 pkt

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - 2(m-1)x + 2m + 6 = 0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie. Zapisz obliczenia.

___ / 4 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Sprawdzian: Wzory Viète'a, równania kwadratowe z parametrem, równania dwukwadratowe (zakres rozszerzony) – grupa A

45 minut · 21 pkt

KARTA 8/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 21 pkt

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Równanie $x^2 + 3x - 10 = 0$ ma dwa pierwiastki. Suma kwadratów tych pierwiastków jest równa

___ / 1 pkt

A. -11 **B.** 9 **C.** 19 **D.** 29

Zadanie 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczba wszystkich rozwiązań rzeczywistych równania $x^4 + x^2 - 12 = 0$ jest równa

___ / 1 pkt

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 4

Zadanie 3. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

___ / 1 pkt

1. Pierwiastki równania $2x^2 + 5x - 4 = 0$ są liczbami różnych znaków.	**P**	**F**
2. Równanie $x^2 - 4x + 5 = 0$ ma dwa pierwiastki, których suma jest równa 4.	**P**	**F**

Zadanie 4. Równanie $x^2 - 3x - 5 = 0$ ma dwa pierwiastki x_1, x_2. Oblicz $x_1^3 + x_2^3$. Zapisz obliczenia.

___ / 2 pkt

Zadanie 5. Rozwiąż równanie $(x^2 - 2x)^2 - 11(x^2 - 2x) + 24 = 0$. Zapisz obliczenia.

___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Sprawdzian: Wzory Viète'a, równania kwadratowe z parametrem, równania dwukwadratowe (zakres rozszerzony) – grupa B

45 minut · 21 pkt

KARTA 9/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 21 pkt

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Równanie $x^2 - 5x - 6 = 0$ ma dwa pierwiastki. Suma kwadratów tych pierwiastków jest równa

___ / 1 pkt

A. 37 **B.** 31 **C.** 13 **D.** 25

Zadanie 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczba wszystkich rozwiązań rzeczywistych równania $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$ jest równa

___ / 1 pkt

A. 4 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 1

Zadanie 3. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

___ / 1 pkt

1. Pierwiastki równania $3x^2 - 2x - 7 = 0$ są liczbami różnych znaków.	**P**	**F**
2. Równanie $x^2 + 2x + 6 = 0$ ma dwa pierwiastki, których iloczyn jest równy 6.	**P**	**F**

Zadanie 4. Równanie $x^2 + 2x - 4 = 0$ ma dwa pierwiastki x_1, x_2. Oblicz $x_1^3 + x_2^3$. Zapisz obliczenia.

___ / 2 pkt

Zadanie 5. Rozwiąż równanie $(x^2 + 3x)^2 - 14(x^2 + 3x) + 40 = 0$. Zapisz obliczenia.

___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Wzory Viète'a, równania kwadratowe z parametrem, równania dwukwadratowe (zakres rozszerzony) – kartkówki, sprawdzian i karty pracy z powtórką,...

Podgląd pokazał 10 z 33 stron. Pełna wersja: 33 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Wzory Viète'a, równania kwadratowe z parametrem, równania dwukwadratowe (zakres rozszerzony) – najważniejsze wiadomości – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 2: Wzory Viète'a, równania kwadratowe z parametrem, równania dwukwadratowe (zakres rozszerzony) – ćwiczenia – 8 zadań, 26 pkt
- Karta 3: Wzory Viète'a, równania kwadratowe z parametrem, równania dwukwadratowe (zakres rozszerzony) – zadania typu maturalnego – 6 zadań, 23 pkt
- Karta 4: Kartkówka 1: wzory Viète'a i równania dwukwadratowe – grupa A – 3 zadania, 7 pkt
- Karta 5: Kartkówka 1: wzory Viète'a i równania dwukwadratowe – grupa B – 3 zadania, 7 pkt
- Karta 6: Kartkówka 2: równania kwadratowe z parametrem – grupa A – 3 zadania, 8 pkt
- Karta 7: Kartkówka 2: równania kwadratowe z parametrem – grupa B – 3 zadania, 8 pkt
- Karta 8: Sprawdzian: Wzory Viète'a, równania kwadratowe z parametrem, równania dwukwadratowe (zakres rozszerzony) – grupa A – 8 zadań, 21 pkt
- Karta 9: Sprawdzian: Wzory Viète'a, równania kwadratowe z parametrem, równania dwukwadratowe (zakres rozszerzony) – grupa B – 8 zadań, 21 pkt Karta 1 przypomina teorię i pokazuje p

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matematyka-liceum-klasa-2-zr-dzial-11-wzory-viete-a-rownania-kwadratowe-z-parametr