PIERWSZA ŁAWKA · ZESTAW DZIAŁOWY · MATEMATYKA · KLASA 3 LO I TECHNIKUM · ZAKRES ROZSZERZONY

Dział 14. Optymalizacja z pochodną (zakres rozszerzony)

Najmniejsza i największa wartość funkcji w przedziale domkniętym, ekstremum w przedziale otwartym (monotoniczność), zadania optymalizacyjne z pochodną: konteksty geometryczne (bryły wpisane, figury wpisane w półkole) i praktyczne (koszt, zysk, czas i droga), wiązka CKE „wykaż wzór” + optymalizacja, miejsce zerowe pochodnej poza dziedziną, wzorzec zapisu uzasadnienia ekstremum, dowód nierówności przez najmniejszą wartość funkcji. Dziewięć kart: teoria z przykładami, ćwiczenia, zadania typu maturalnego, dwie kartkówki (A i B) i sprawdzian (A i B) – z kluczem i zasadami oceniania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Optymalizacja z pochodną (zakres rozszerzony) – najważniejsze wiadomości** Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka	3 zad. 6 pkt
2	**Optymalizacja z pochodną (zakres rozszerzony) – ćwiczenia** Ćwiczę umiejętności z działu	7 zad. 24 pkt
3	**Optymalizacja z pochodną (zakres rozszerzony) – zadania typu maturalnego** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	6 zad. 31 pkt
4	**Kartkówka 1: najmniejsza i największa wartość funkcji w przedziale – grupa A** 15 minut · 8 pkt	3 zad. 8 pkt
5	**Kartkówka 1: najmniejsza i największa wartość funkcji w przedziale – grupa B** 15 minut · 8 pkt	3 zad. 8 pkt
6	**Kartkówka 2: zadanie optymalizacyjne – grupa A** 15 minut · 9 pkt	3 zad. 9 pkt
7	**Kartkówka 2: zadanie optymalizacyjne – grupa B** 15 minut · 9 pkt	3 zad. 9 pkt
8	**Sprawdzian: Optymalizacja z pochodną (zakres rozszerzony) – grupa A** 45 minut · 24 pkt	8 zad. 24 pkt

9	**Sprawdzian: Optymalizacja z pochodną (zakres rozszerzony) – grupa B** 45 minut · 24 pkt	8 zad. 24 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 przypomina najważniejsze wiadomości z działu i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku – od niej warto zacząć.
- Karta 2 to ćwiczenia, a karta 3 – zadania w formule matury 2027 (polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE).
- Karty 4–7 to dwie kartkówki (po 15 minut), każda w grupach A i B. Karty 8–9 to sprawdzian (45 minut) w grupach A i B – te same typy zadań i ta sama punktacja, inne liczby.
- Klucz na końcu zestawu zawiera odpowiedzi, przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE (kamienie milowe, błąd rachunkowy = −1 pkt).
- Osobny plik „Powtórka” zbiera definicje, wzory (z zaznaczeniem, które są w karcie wzorów CKE), typowe błędy i test „Sprawdź się”.

Materiał oryginalny. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: XIII.R6 (w tle XIII.R4–XIII.R5, V.4, VIII.8, X.5); cele ogólne III.2, IV.1, IV.3, IV.4. Miejsce w seriach podręczników: NE ZPiR kl. 3 (Rachunek różniczkowy: optymalizacja) · Pazdro ZR kl. 3 (Elementy analizy matematycznej) · GWO ZR kl. 4 (Pochodne). Nazwy wydawnictw i serii podano tylko informacyjnie – materiał nie jest z nimi powiązany. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

Podgląd • Pierwsza Ławka

- **Skróty rachunkowe.** Znak ilorazu $\frac{L(x)}{(M(x))^2}$ jest taki jak znak licznika $L(x)$. Stały dodatni czynnik (np. $\frac{\pi}{3}$) nie zmienia miejsca ekstremum. Gdy funkcja celu ma postać $\sqrt{g(x)}$, możesz badać $g(x)$ (pierwiastek jest funkcją rosnącą) – napisz to zdanie w rozwiązaniu. Gdy miejsce zerowe pochodnej leży **poza dziedziną**, funkcja jest monotoniczna i ekstremum jest na końcu przedziału.
- Karta wzorów CKE: są pochodne i reguły różniczkowania oraz objętości i pola brył. Nie ma schematu badania monotoniczności i wyznaczania ekstremów – ten schemat trzeba znać.

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^3 - 12x + 1$ w przedziale $\langle -3, 5\rangle$.

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$; miejsca zerowe -2 i 2 – oba należą do $(-3, 5)$.
$f(-3) = -27 + 36 + 1 = 10$, $f(-2) = -8 + 24 + 1 = 17$, $f(2) = 8 - 24 + 1 = -15$,
$f(5) = 125 - 60 + 1 = 66$.
Najmniejsza wartość: -15 (dla $x = 2$), największa: 66 (dla $x = 5$ – na końcu przedziału, choć w -2 jest maksimum lokalne).

Przykład 2. Rozważamy akwaria w kształcie prostopadłościanu bez pokrywy, o podstawie kwadratowej i objętości 32 dm³. a) Wykaż, że pole powierzchni szyb (w dm²) akwarium o krawędzi podstawy a wyraża się wzorem $P(a) = a^2 + \frac{128}{a}$. b) Wyznacz wymiary akwarium, do którego zbudowania zużyto najmniej szkła.

a) a – krawędź podstawy, H – wysokość (dm), $a > 0$. $a^2H = 32$, więc $H = \frac{32}{a^2}$. Szkło: dno i 4 ściany: $P = a^2 + 4aH = a^2 + \frac{128}{a}$. To należało wykazać.

b) $P'(a) = 2a - \frac{128}{a^2} = \frac{2(a^3 - 64)}{a^2}$; $P'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 4$. $P'(a) < 0$ dla $a \in (0, 4)$, $P'(a) > 0$ dla $a > 4$, więc P maleje w $(0, 4\rangle$ i rośnie w $\langle 4, +\infty)$ – najmniejsze pole dla $a = 4$ dm: $H = 2$ dm, $P(4) = 16 + 32 = 48$ dm².

Przykład 3. Trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości 6 obracamy wokół jednej z przyprostokątnych. Wyznacz długość tej przyprostokątnej, dla której objętość otrzymanego stożka jest największa. Oblicz tę objętość.

h – przyprostokątna (wysokość stożka), r – druga przyprostokątna (promień), $h \in (0, 6)$.
$r^2 = 36 - h^2$, $V(h) = \frac{\pi}{3}(36 - h^2)h = \frac{\pi}{3}(36h - h^3)$.
$V'(h) = \frac{\pi}{3}(36 - 3h^2) = \pi(12 - h^2)$; w dziedzinie $V'(h) = 0 \Leftrightarrow h = 2\sqrt{3}$. $V' > 0$ w $(0, 2\sqrt{3})$, $V' < 0$ w $(2\sqrt{3}, 6)$ – maksimum.
$r^2 = 36 - 12 = 24$, $V = \frac{\pi}{3} \cdot 24 \cdot 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}\pi$.

Przykład 4. Ratownik stoi w punkcie *R* na prostym brzegu. Tonący jest 60 m od brzegu, a punkt brzegu najbliższy tonącemu, *B*, jest oddalony od *R* o 200 m. Ratownik biegnie brzegiem z prędkością 6 m/s, a płynie z prędkością 2 m/s. W jakiej odległości od *B* powinien wejść do wody, aby dotrzeć do tonącego najszybciej?

x – odległość (m) punktu wejścia do wody od B, $x \in \langle 0, 200\rangle$. Czas:

$T(x) = \frac{200 - x}{6} + \frac{\sqrt{x^2 + 3600}}{2}$.

$T'(x) = -\frac{1}{6} + \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 3600}}$ (pochodna funkcji złożonej).

$T'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x = \sqrt{x^2 + 3600} \Leftrightarrow 8x^2 = 3600 \Leftrightarrow x = 15\sqrt{2}$ $(x \geq 0)$.

Dla $x < 15\sqrt{2}$ pochodna jest ujemna, dla $x > 15\sqrt{2}$ dodatnia – minimum. $x = 15\sqrt{2} \approx 21{,}2$ m,

$T = \frac{100}{3} + 20\sqrt{2} \approx 61{,}6$ s.

ZADANIA

Zadanie 1. Funkcja $f(x) = -x^3 + 3x$ jest rozważana w przedziale $\langle 0, 2\rangle$. Uzupełnij. ___ / 2 pkt

1. Największa wartość funkcji f w tym przedziale jest równa _____
2. Najmniejsza wartość funkcji f w tym przedziale jest równa _____

Zadanie 2. Funkcja $f(x) = x + \frac{4}{x}$ określona dla $x > 0$ przyjmuje wartość najmniejszą dla x równego ___ / 1 pkt

A. 4 **B.** 1 **C.** 8 **D.** 2

Zadanie 3. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 3 pkt

1. Funkcja ciągła w przedziale domkniętym przyjmuje w nim wartość najmniejszą i największą.	**P**	**F**
2. Jeżeli pochodna funkcji f ma w przedziale (0, 8) jedno miejsce zerowe, to funkcja f ma w tym punkcie wartość największą w tym przedziale.	**P**	**F**
3. Jeżeli f jest ciągła w $\langle 1, 4\rangle$ i $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (1, 4)$, to najmniejszą wartością f w $\langle 1, 4\rangle$ jest $f(1)$.	**P**	**F**

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 3. W półkole o promieniu 5 wpisujemy prostokąty tak, że jeden bok prostokąta leży na średnicy półkola, a dwa wierzchołki – na łuku. Niech x oznacza połowę długości boku leżącego na średnicy. a) Wykaż, że pole prostokąta wyraża się wzorem $P(x) = 2x\sqrt{25 - x^2}$, gdzie $x \in (0, 5)$. b) Wyznacz wymiary prostokąta o największym polu i oblicz to pole. ___ / 5 pkt

Zadanie 4. Zysk firmy (w tys. zł) ze sprzedaży x ton produktu opisuje funkcja $Z(x) = -x^3 + 12x^2 + 60x - 100$ dla $x \in \langle 0, 15 \rangle$. Oblicz, przy jakiej wielkości sprzedaży zysk jest największy, i podaj ten zysk. ___ / 3 pkt

Zadanie 5. Puszka ma kształt walca o objętości 250π cm³. Wyznacz promień podstawy i wysokość puszki, do wykonania której zużyto najmniej blachy (najmniejsze pole powierzchni całkowitej). Oblicz to pole. ___ / 4 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

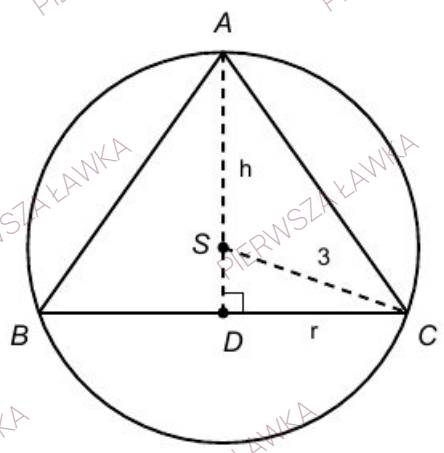
Optymalizacja z pochodną (zakres rozszerzony) – zadania typu maturalnego

Polecenia i punktacja jak na maturze 2027

KARTA 3/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 31 pkt

Zadanie 1. Rozważamy wszystkie stożki wpisane w kulę o promieniu 3 (wierzchołek stożka i okrąg jego podstawy leżą na sferze). Niech *h* oznacza wysokość stożka, *r* – promień jego podstawy (zobacz rysunek przekroju osiowego). ___ / 6 pkt

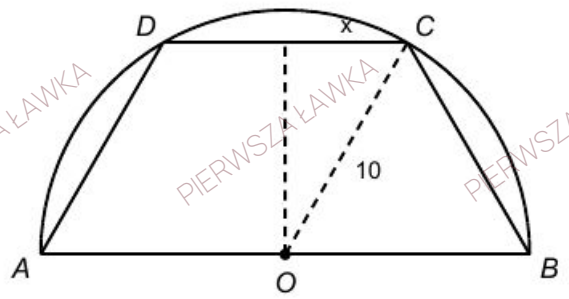


1.1. Wykaż, że objętość *V* stożka jako funkcja wysokości *h* wyraża się wzorem $V(h) = \frac{\pi}{3}(6h^2 - h^3)$, gdzie $h \in (0, 6)$. ___ / 2 pkt

PIERWSZA ŁAWKA

1.2. Objętość V stożka jako funkcja wysokości h wyraża się wzorem $V(h) = \frac{\pi}{3}(6h^2 - h^3)$ dla $h \in (0, 6)$. Wyznacz wysokość tego z rozważanych stożków, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość. Zapisz obliczenia. ___ / 4 pkt

Zadanie 2. Z półkola o promieniu 10 dm wycinamy trapez równoramienny $ABCD$, którego dłuższą podstawą AB jest średnica półkola, a wierzchołki C i D leżą na łuku (zobacz rysunek). Niech x oznacza połowę długości krótszej podstawy CD (w dm), $x \in (0, 10)$. ___ / 6 pkt



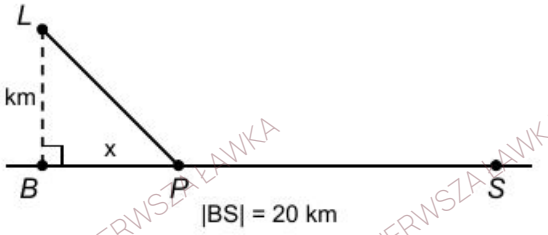
2.1. Wykaż, że pole trapezu $ABCD$ (w dm²) wyraża się wzorem $P(x) = (x + 10)\sqrt{100 - x^2}$.

___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 4. Leśniczówka *L* jest oddalona o 6 km od prostej drogi, a punkt *B* drogi leży najbliżej leśniczówki. Stacja *S* leży przy drodze w odległości 20 km od *B* (zobacz rysunek). Z leśniczówki do punktu *P* drogi quad jedzie na przełaj z prędkością 30 km/h, a drogą od *P* do *S* – z prędkością 50 km/h. Wyznacz odległość $x = |BP|$, przy której czas dojazdu do stacji jest najkrótszy. Oblicz ten czas. Zapisz obliczenia.

___ / 5 pkt



Zadanie 5. Samochód dostawczy pokonuje trasę długości 300 km ze stałą prędkością *v* (w km/h), gdzie $v \in \langle 60, 140 \rangle$. Koszt jednej godziny jazdy (wynagrodzenie kierowcy, paliwo i eksploatacja) wyraża się wzorem $72 + \frac{v^2}{200}$ (w zł).

___ / 6 pkt

5.1. Wykaż, że koszt *K* przejazdu całej trasy (w zł) jako funkcja prędkości *v* wyraża się wzorem $K(v) = \frac{21\,600}{v} + \frac{3v}{2}$.

___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Kartkówka 1: najmniejsza i największa wartość funkcji w przedziale – grupa A

15 minut · 8 pkt

KARTA 4/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Najmniejsza wartość funkcji $f(x) = x^3 - 48x$ w przedziale $\langle 0, 5\rangle$ jest równa ___ / 1 pkt

A. -115 **B.** 0 **C.** -128 **D.** -96

Zadanie 2. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$ w przedziale $\langle -2, 3\rangle$. Zapisz obliczenia. ___ / 4 pkt

Zadanie 3. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x + \frac{25}{x}$ w przedziale $\langle 1, 10\rangle$. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Kartkówka 1: najmniejsza i największa wartość funkcji w przedziale – grupa B

15 minut · 8 pkt

KARTA 5/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Najmniejsza wartość funkcji $f(x) = x^3 - 27x$ w przedziale $\langle 0, 4\rangle$ jest równa ___ / 1 pkt

A. -81 **B.** -54 **C.** 0 **D.** -44

Zadanie 2. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$ w przedziale $\langle -3, 2\rangle$. Zapisz obliczenia. ___ / 4 pkt

Zadanie 3. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x + \frac{36}{x}$ w przedziale $\langle 2, 9\rangle$. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

PIERWSZA ŁAWKA

Kartkówka 2: zadanie optymalizacyjne – grupa A

15 minut · 9 pkt

KARTA 6/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 9 pkt

Zadanie 1. Prostopadłościan o podstawie kwadratowej o krawędzi x ma objętość 64. Wykaż, że pole jego powierzchni całkowitej wyraża się wzorem $P(x) = 2x^2 + \frac{256}{x}$. ___ / 2 pkt

Zadanie 2. Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o podstawie kwadratowej wyraża się wzorem $P(x) = 2x^2 + \frac{256}{x}$ dla $x > 0$. Wyznacz x, dla którego pole jest najmniejsze, i oblicz to pole. Zapisz obliczenia. ___ / 4 pkt

Zadanie 3. Liczby nieujemne x i y spełniają warunek $x + 2y = 12$. Wyznacz te liczby, dla których iloczyn xy^2 jest największy. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

PIERWSZA ŁAWKA

Sprawdzian: Optymalizacja z pochodną (zakres rozszerzony) – grupa A

45 minut · 24 pkt

KARTA 8/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 24 pkt

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Największa wartość funkcji $f(x) = x^3 - 3x + 1$ w przedziale $\langle 0, 2\rangle$ jest równa ___ / 1 pkt

A. 3 **B.** −1 **C.** 2 **D.** 1

Zadanie 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

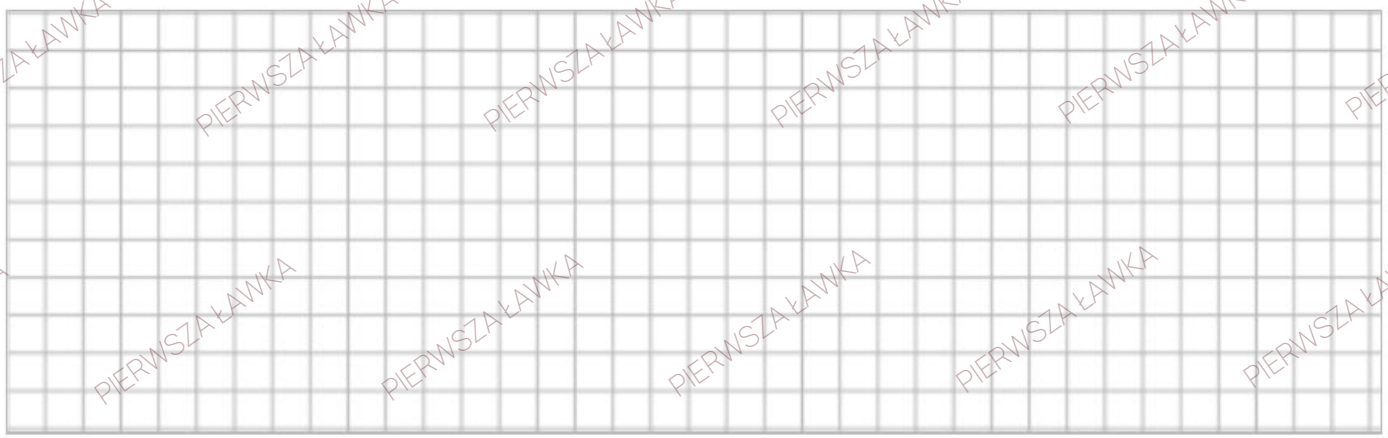
Najmniejsza wartość funkcji $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ określonej dla $x > 0$ jest równa ___ / 1 pkt

A. 16 **B.** 20 **C.** 12 **D.** 8

Zadanie 3. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle 0, 5\rangle$ i $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (0, 5)$, to najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $\langle 0, 5\rangle$ jest $f(5)$.	**P**	**F**
2. Jeżeli funkcja ma w przedziale otwartym minimum lokalne, to jest to jej najmniejsza wartość w tym przedziale.	**P**	**F**

Zadanie 4. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ w przedziale $\langle -1, 4\rangle$. Zapisz obliczenia. ___ / 4 pkt



Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Optymalizacja z pochodną (zakres rozszerzony) – kartkówki, sprawdzian i karty pracy z powtórką, matematyka, klasa 3 LO i technikum (zakres...

Podgląd pokazał 12 z 41 stron. Pełna wersja: 41 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Optymalizacja z pochodną (zakres rozszerzony) – najważniejsze wiadomości – 3 zadania, 6 pkt
- Karta 2: Optymalizacja z pochodną (zakres rozszerzony) – ćwiczenia – 7 zadań, 24 pkt
- Karta 3: Optymalizacja z pochodną (zakres rozszerzony) – zadania typu maturalnego – 6 zadań, 31 pkt
- Karta 4: Kartkówka 1: najmniejsza i największa wartość funkcji w przedziale – grupa A – 3 zadania, 8 pkt
- Karta 5: Kartkówka 1: najmniejsza i największa wartość funkcji w przedziale – grupa B – 3 zadania, 8 pkt
- Karta 6: Kartkówka 2: zadanie optymalizacyjne – grupa A – 3 zadania, 9 pkt
- Karta 7: Kartkówka 2: zadanie optymalizacyjne – grupa B – 3 zadania, 9 pkt
- Karta 8: Sprawdzian: Optymalizacja z pochodną (zakres rozszerzony) – grupa A – 8 zadań, 24 pkt
- Karta 9: Sprawdzian: Optymalizacja z pochodną (zakres rozszerzony) – grupa B – 8 zadań, 24 pkt Karta 1 przypomina teorię i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku.

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matematyka-liceum-klasa-3-zr-dzial-14-optymalizacja-z-pochodna-zakres-rozszerzony