PIERWSZA ŁAWKA · ZESTAW DZIAŁOWY · MATEMATYKA · KLASA 3 LO I TECHNIKUM · ZAKRES ROZSZERZONY

Dział 15. Geometria analityczna – zakres rozszerzony

Prosta prostopadła (warunek $a_1 \cdot a_2 = -1$ i postać ogólna), współczynnik kierunkowy a tangens kąta, rzut punktu na prostą i symetria względem prostej, punkty wspólne prostej i okręgu, styczna do okręgu w danym punkcie i z danego punktu, wzajemne położenie i punkty wspólne dwóch okręgów, układy równań drugiego stopnia, wektory (współrzędne, długość, dodawanie, mnożenie przez liczbę, równoległość), podział odcinka w danym stosunku, wektory w równoległoboku i rombie, dowód wektorowy. Dziewięć kart: teoria z przykładami, ćwiczenia, zadania typu maturalnego, dwie kartkówki (A i B) i sprawdzian (A i B) – z kluczem i zasadami oceniania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Geometria analityczna – zakres rozszerzony – najważniejsze wiadomości** Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka	4 zad. 11 pkt
2	**Geometria analityczna – zakres rozszerzony – ćwiczenia** Ćwiczę umiejętności z działu	8 zad. 28 pkt
3	**Geometria analityczna – zakres rozszerzony – zadania typu maturalnego** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	7 zad. 29 pkt
4	**Kartkówka 1: prosta prostopadła i styczna do okręgu – grupa A** 15 minut · 9 pkt	4 zad. 9 pkt
5	**Kartkówka 1: prosta prostopadła i styczna do okręgu – grupa B** 15 minut · 9 pkt	4 zad. 9 pkt
6	**Kartkówka 2: wektory i podział odcinka – grupa A** 15 minut · 9 pkt	4 zad. 9 pkt
7	**Kartkówka 2: wektory i podział odcinka – grupa B** 15 minut · 9 pkt	4 zad. 9 pkt
8	**Sprawdzian: Geometria analityczna – zakres rozszerzony – grupa A** 45 minut · 23 pkt	8 zad. 23 pkt
9	**Sprawdzian: Geometria analityczna – zakres rozszerzony – grupa B** 45 minut · 23 pkt	8 zad. 23 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 przypomina najważniejsze wiadomości z działu i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku – od niej warto zacząć.
- Karta 2 to ćwiczenia, a karta 3 – zadania w formule matury 2027 (polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE).
- Karty 4–7 to dwie kartkówki (po 15 minut), każda w grupach A i B. Karty 8–9 to sprawdzian (45 minut) w grupach A i B – te same typy zadań i ta sama punktacja, inne liczby.
- Klucz na końcu zestawu zawiera odpowiedzi, przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE (kamienie milowe, błąd rachunkowy = −1 pkt).
- Osobny plik „Powtórka" zbiera definicje, wzory (z zaznaczeniem, które są w karcie wzorów CKE), typowe błędy i test „Sprawdź się".

Materiał oryginalny. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: IX.R1–IX.R4, IV.R (w tle IX.1–IX.5, VIII.1, VIII.4, III.R5); cele ogólne III.1, IV.1, IV.3, IV.4. Miejsce w seriach podręczników: NE ZPiR kl. 3 · Pazdro ZR kl. 3 (technikum kl. 3–4) · GWO ZR kl. 3; wektory w NE i GWO także w kl. 1. Nazwy wydawnictw i serii podano tylko informacyjnie – materiał nie jest z nimi powiązany.
Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

PIERWSZA ŁAWKA

Geometria analityczna – zakres rozszerzony – najważniejsze wiadomości

Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka

KARTA 1/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 11 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Prosta prostopadła.** Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$, czyli $a_2 = -\frac{1}{a_1}$ (np. do prostej $y = 3x - 2$ prostopadłe są proste o współczynniku kierunkowym $-\frac{1}{3}$, a nie -3). Proste $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$. Prosta pozioma $y = c$ jest prostopadła do każdej prostej pionowej $x = d$.
- **Prosta prostopadła przez dany punkt.** Proste prostopadłe do prostej $Ax + By + C = 0$ mają równania $Bx - Ay + D = 0$ – liczbę D wyznaczamy, podstawiając współrzędne punktu. W postaci kierunkowej: $y = a(x - x_0) + y_0$ z $a = -\frac{1}{a_1}$. **Symetralna odcinka** AB to prosta prostopadła do AB przechodząca przez środek odcinka – jej punkty są jednakowo odległe od A i B.
- **Współczynnik kierunkowy a kąt nachylenia.** Jeżeli prosta $y = ax + b$ tworzy z dodatnią półosią Ox kąt α, to $a = \operatorname{tg}\alpha$. Prosta nachylona pod kątem 135° ma współczynnik $\operatorname{tg}135° = -1$, a pod kątem 60° – współczynnik $\sqrt{3}$. (Na maturze PR 2023, zad. 13, wielu zdających nie powiązało współczynnika kierunkowego z tangensem kąta.)
- **Rzut punktu na prostą i symetria względem prostej.** Rzut prostokątny P' punktu P na prostą k: 1) wyznacz prostą przez P prostopadłą do k; 2) oblicz jej punkt przecięcia z prostą k. Odcinek PP' jest najkrótszym odcinkiem łączącym P z prostą k (wzoru na tę odległość nie ma w podstawie programowej od 2024 r. – liczymy ją właśnie tak). Punkt symetryczny do P względem k: $P'' = (2x_{P'} - x_P, 2y_{P'} - y_P)$, bo P' jest środkiem odcinka PP''. Obraz okręgu w symetrii względem prostej: przekształcamy środek, promień się nie zmienia.
- **Prosta i okrąg.** Punkty wspólne to rozwiązania układu złożonego z równania prostej i równania okręgu. Z równania prostej wyznaczamy jedną niewiadomą i podstawiamy do równania okręgu – powstaje równanie kwadratowe. $\Delta > 0$ – dwa punkty wspólne (sieczna), $\Delta = 0$ – jeden punkt (styczna), $\Delta < 0$ – brak punktów wspólnych. Można też porównać promień z długością odcinka SS', gdzie S' – rzut środka okręgu na prostą.
- **Styczna w danym punkcie okręgu.** Styczna do okręgu w punkcie T jest prostopadła do promienia ST. Liczymy współczynnik kierunkowy prostej ST, potem $a = -\frac{1}{a_{ST}}$ i równanie $y = a(x - x_T) + y_T$. Gdy promień ST jest poziomy, styczna jest pionowa ($x = x_T$), gdy pionowy – pozioma. Zacznij od sprawdzenia, że punkt T leży na okręgu.

- **Styczne z punktu zewnętrznego *P*.** Sposób I: proste przez P to $y = a(x - x_P) + y_P$ oraz prosta pionowa $x = x_P$ – tę sprawdzamy osobno, bo nie ma współczynnika kierunkowego. Po podstawieniu do równania okręgu żądamy $\Delta = 0$ i otrzymujemy równanie z niewiadomą a. Sposób II: z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie PTS (kąt prosty przy T) $|PT|^2 = |PS|^2 - r^2$; punkty styczności leżą na okręgu o środku P i promieniu $|PT|$ – rozwiązujemy układ równań dwóch okręgów.

Położenie okręgów o środkach S_1, S_2 i promieniach $r_1 \geq r_2$; $d = \|S_1S_2\|$	Punkty wspólne
rozłączne zewnętrznie: $d > r_1 + r_2$	0
styczne zewnętrznie: $d = r_1 + r_2$	1
przecinające się: $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$	2
styczne wewnętrznie: $d = r_1 - r_2$, $d > 0$	1
rozłączne wewnętrznie (jeden wewnątrz drugiego): $d < r_1 - r_2$ (dla $d = 0$ – współśrodkowe)	0

- **Punkty wspólne dwóch okręgów – układ równań drugiego stopnia.** Odejmujemy równania stronami: kwadraty niewiadomych się redukują (wygodnie ze wzoru na różnicę kwadratów: $(x - a)^2 - (x - c)^2 = (c - a)(2x - a - c)$) i zostaje równanie prostej, na której leżą punkty wspólne. Wyznaczamy z niego jedną niewiadomą i podstawiamy do równania jednego z okręgów. Środki obu okręgów leżą na symetralnej wspólnej cięciwy, więc prosta S_1S_2 jest prostopadła do tej cięciwy.
- **Wektory.** $\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$ (koniec minus początek), długość $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$, $\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2]$, $k \cdot \vec{u} = [ku_1, ku_2]$. Wektory są równe, gdy mają równe współrzędne; czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są równoległe, gdy $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$ dla pewnej liczby k, czyli gdy $u_1v_2 - u_2v_1 = 0$. Przesunięcie o wektor $[p, q]$ przekształca punkt (x, y) na $(x + p, y + q)$.
- **Podział odcinka w danym stosunku.** Punkt P odcinka AB, dla którego $|AP| : |PB| = m : n$, spełnia $\overrightarrow{AP} = \frac{m}{m+n} \cdot \overrightarrow{AB}$ – przy stosunku 2 : 3 bierzemy $\frac{2}{5}$ wektora $\overrightarrow{AB}$, a nie $\frac{2}{3}$. Środek ciężkości trójkąta $G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$ dzieli każdą środkową w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka.
- W „Wybranych wzorach matematycznych” CKE są: warunki równoległości i prostopadłości prostych, równanie okręgu, współrzędne i długość wektora, działania na wektorach, przesunięcie o wektor, symetrie (także względem dowolnego punktu), pole trójkąta o danych wierzchołkach i środek ciężkości. Karta z 2022 r. zawiera też wzór na odległość od prostej i postać ogólną równania okręgu – od 2024 r. nie ma ich w wymaganiach, a każde zadanie tego działu da się rozwiązać bez nich.

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej $2x - 3y + 6 = 0$, przechodzącej przez punkt $P = (4, -1)$. Podaj je w postaci kierunkowej i ogólnej.

Dana prosta: $3y = 2x + 6$, czyli $y = \frac{2}{3}x + 2$, $a_1 = \frac{2}{3}$. Prosta prostopadła ma współczynnik $a = -\frac{3}{2}$, bo $\frac{2}{3} \cdot (-\frac{3}{2}) = -1$.

$y = -\frac{3}{2}(x - 4) - 1 = -\frac{3}{2}x + 5$. Postać ogólna: $3x + 2y - 10 = 0$.

Sprawdzenie: $A_1A_2 + B_1B_2 = 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 = 0$ oraz $3 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) - 10 = 0$ – prosta przechodzi przez P.

Przykład 2. Dane są punkt $P = (-3, 5)$ i prosta k: $y = 2x + 1$. Wyznacz rzut prostokątny punktu P na prostą k oraz punkt Q symetryczny do P względem prostej k.

Prosta przez P prostopadła do k: $a = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}(x + 3) + 5 = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

Punkt przecięcia z k: $2x + 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$, $\frac{5}{2}x = \frac{5}{2}$, $x = 1$, $y = 3$. Rzut: $P' = (1, 3)$.

P' jest środkiem odcinka PQ: $Q = (2 \cdot 1 - (-3), 2 \cdot 3 - 5) = (5, 1)$. Przy okazji: $|PP'| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ – tyle wynosi najkrótszy odcinek łączący P z prostą k.

Przykład 3. Wyznacz punkty wspólne prostej $y = x - 2$ i okręgu $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 25$. Oblicz długość cięciwy, którą okrąg wycina z tej prostej.

Podstawiamy $y = x - 2$: $(x - 5)^2 + x^2 = 25$, $2x^2 - 10x = 0$, $x(x - 5) = 0$, $x = 0$ lub $x = 5$. Punkty wspólne: $(0, -2)$ i $(5, 3)$ – prosta jest sieczną (dwa różne rozwiązania). Długość cięciwy: $\sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$.

Przykład 4. Wyznacz równanie stycznej do okręgu $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 20$ w punkcie $T = (2, 3)$.

Sprawdzenie: $(2 + 2)^2 + (3 - 1)^2 = 16 + 4 = 20$ – punkt T leży na okręgu. Środek okręgu: $S = (-2, 1)$.

Współczynnik kierunkowy prostej ST: $\frac{3 - 1}{2 + 2} = \frac{1}{2}$. Styczna jest prostopadła do promienia ST, więc $a = -2$.

$y = -2(x - 2) + 3$, czyli $y = -2x + 7$.

PIERWSZA ŁAWKA

Przykład 5. Z punktu $P = (-3, 6)$ poprowadzono dwie styczne do okręgu $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$. Wyznacz równania stycznych i punkty styczności.

Sposób I (warunek $\Delta = 0$). Prosta $x = -3$ nie jest styczna: równanie $25 + (y-1)^2 = 5$ nie ma rozwiązań. Pozostałe proste przez P: $y = a(x+3) + 6$. Podstawiamy:

$(x-2)^2 + (ax + 3a + 5)^2 = 5$, czyli $(1+a^2)x^2 + (6a^2 + 10a - 4)x + 9a^2 + 30a + 24 = 0$.

$\frac{\Delta}{4} = (3a^2 + 5a - 2)^2 - (1+a^2)(9a^2 + 30a + 24) = -10(2a^2 + 5a + 2)$, więc

$\Delta = 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 5a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$ lub $a = -\frac{1}{2}$.

Styczne: $y = -2x$ i $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$. Punkty styczności (podwójne rozwiązania): $T_1 = (0, 0)$ i $T_2 = (3, 3)$.

Sposób II (odcinek stycznej). $|PS|^2 = 5^2 + 5^2 = 50$, więc $|PT|^2 = 50 - 5 = 45$. Punkty styczności leżą na okręgu $(x+3)^2 + (y-6)^2 = 45$. Odejmujemy równania okręgów:

$5(2x+1) - 5(2y-7) = 40$, czyli $y = x$. Stąd $(x-2)^2 + (x-1)^2 = 5$, $x^2 - 3x = 0$: $T_1 = (0, 0)$, $T_2 = (3, 3)$ – styczne to proste PT_1 i PT_2.

Przykład 6. Zbadaj wzajemne położenie okręgów $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 25$ i $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 50$. Wyznacz ich punkty wspólne.

$S_1 = (3, 3)$, $r_1 = 5$; $S_2 = (4, 5)$, $r_2 = 5\sqrt{2}$; $|S_1S_2| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$. Ponieważ $5\sqrt{2} - 5 < \sqrt{5} < 5\sqrt{2} + 5$, okręgi przecinają się w dwóch punktach.

Odejmujemy równania: $(x-3)^2 - (x-4)^2 + (y-3)^2 - (y-5)^2 = -25$, czyli $(2x-7) + 2(2y-8) = -25$, $2x + 4y = -2$, $x = -1 - 2y$.

Podstawiamy do pierwszego równania: $(-4 - 2y)^2 + (y-3)^2 = 25$, $5y^2 + 10y = 0$, $y = 0$ lub $y = -2$. Punkty wspólne: $(-1, 0)$ i $(3, -2)$.

Przykład 7. Dane są punkty $A = (-2, 1)$ i $B = (7, 4)$. a) Wyznacz punkt P odcinka AB, dla którego $|AP| : |PB| = 2 : 1$. b) Punkt $C = (8, 9)$ jest trzecim wierzchołkiem równoległoboku $ABCD$. Wyznacz wierzchołek D.

a) $\overrightarrow{AB} = [9, 3]$, $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB} = [6, 2]$, więc $P = (-2 + 6, 1 + 2) = (4, 3)$.

b) $ABCD$ jest równoległobokiem, więc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = [1, 5]$ i $D = (-2 + 1, 1 + 5) = (-1, 6)$.

Sprawdzenie: $\overrightarrow{DC} = [9, 3] = \overrightarrow{AB}$.

ZADANIA

Zadanie 1. Uzupełnij. ___ / 6 pkt

1. Współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej $y = 4x - 7$: _____
2. Współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej $3x + 5y - 2 = 0$: _____
3. Współczynnik kierunkowy prostej nachylonej do osi Ox pod kątem $135°$: _____
4. Dla $A = (2, -1)$ i $B = (-1, 3)$ wektor $\overrightarrow{AB}$ ma współrzędne _____
5. Długość tego wektora $\overrightarrow{AB}$ jest równa _____
6. Obraz punktu $(3, -2)$ w przesunięciu o wektor $[-5, 4]$: _____

Podgląd • Pierwsza Ławka

Geometria analityczna – zakres rozszerzony – ćwiczenia

KARTA 2/9

Ćwiczę umiejętności z działu

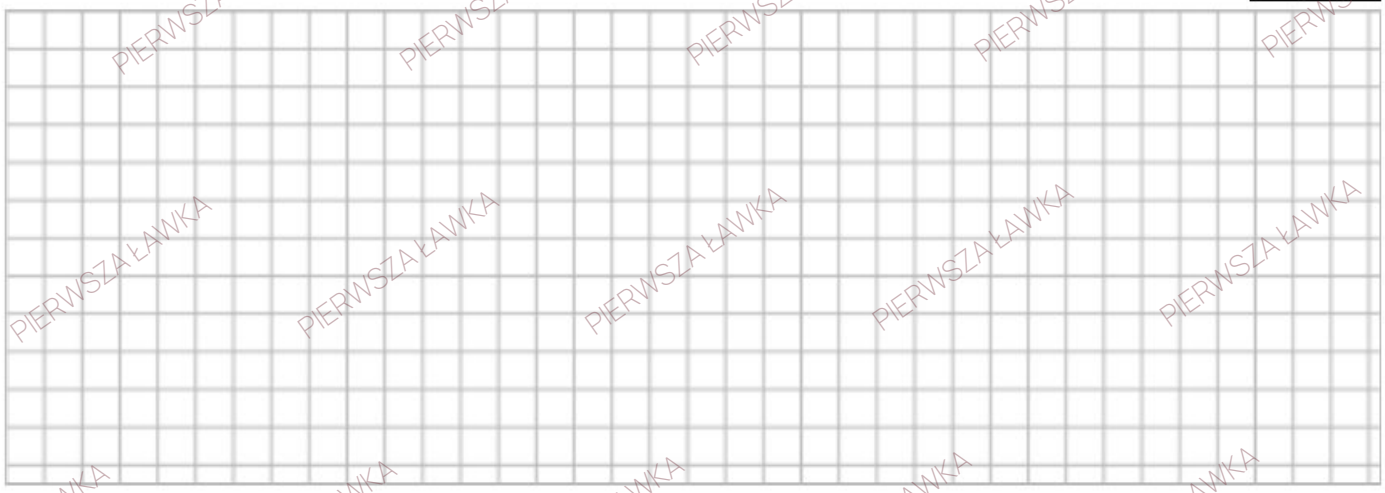
Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 28 pkt

Zadanie 1. Zapisz w postaci kierunkowej równanie prostej. ___ / 4 pkt

1. prostopadłej do prostej $y = 3x + 2$, przechodzącej przez punkt (6, 1): _____
2. prostopadłej do prostej $2x + 5y - 1 = 0$, przechodzącej przez punkt (−2, 3): _____
3. symetralnej odcinka AB, gdzie $A = (-1, 2)$ i $B = (5, 6)$: _____
4. przechodzącej przez punkt (0, −2) i nachylonej do osi Ox pod kątem 45°: _____

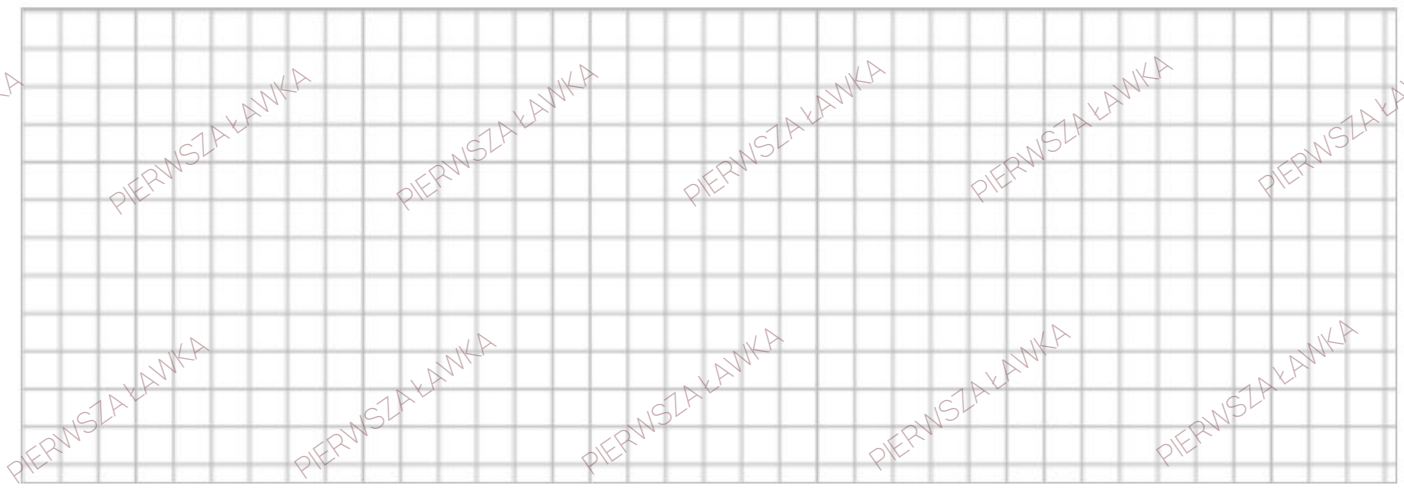
Zadanie 2. Dane są okrąg o: $(x - 6)^2 + (y + 1)^2 = 4$ i prosta k: $x - 2y + 2 = 0$. a) Wyznacz rzut prostokątny środka okręgu o na prostą k. b) Zapisz równanie obrazu okręgu o w symetrii względem prostej k. c) Uzasadnij, że okrąg o i prosta k nie mają punktów wspólnych.

___ / 3 pkt



Zadanie 3. Wyznacz punkty wspólne okręgu $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$ i prostej $x - 2y - 2 = 0$. Oblicz długość otrzymanej cięciwy. Wyznacz równanie symetralnej tej cięciwy i sprawdź, że przechodzi ona przez środek okręgu.

___ / 3 pkt



Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 4. Dopasuj do każdej pary okręgów (1–4) ich wzajemne położenie (a–d). ___ / 4 pkt

1. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ i $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 16$

2. $x^2 + (y-1)^2 = 25$ i $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$

3. $(x+2)^2 + y^2 = 36$ i $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 1$

4. $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 4$ i $(x+1)^2 + (y-7)^2 = 9$

a) styczne wewnętrznie

b) rozłączne zewnętrznie

c) przecinające się w dwóch punktach

d) styczne zewnętrznie

1 ____ 2 ____ 3 ____ 4 ____

Zadanie 5. Wyznacz równanie stycznej do okręgu $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 13$ w punkcie $T = (5, 1)$. Oblicz współrzędne punktów, w których ta styczna przecina osie układu. ___ / 3 pkt

Zadanie 6. Punkty $A = (-3, -1)$, $B = (5, 1)$ i $C = (6, 5)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wyznacz wierzchołek D, korzystając z równości $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Oblicz współrzędne i długość wektora $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - 2 \cdot \overrightarrow{AD}$. ___ / 3 pkt

PIERWSZA ŁAWKA

Kartkówka 1: prosta prostopadła i styczna do okręgu – grupa A

15 minut · 9 pkt

KARTA 4/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 9 pkt

Zadanie 1. Prosta prostopadła do prostej $4x - 2y + 7 = 0$, przechodząca przez punkt (2, 5), ma równanie ___ / 1 pkt

A. $y = -2x + 9$

B. $y = 2x + 1$

C. $y = -\frac{1}{2}x + 6$

D. $y = \frac{1}{2}x + 4$

Zadanie 2. Uzupełnij. ___ / 2 pkt

1. Współczynnik kierunkowy prostej nachylonej do osi Ox pod kątem 150° jest równy _____
2. Współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej $y = -4x + 1$ jest równy _____

Zadanie 3. Wyznacz równanie stycznej do okręgu $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$ w punkcie $T = (2, 4)$. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 4. Wyznacz współrzędne punktu Q symetrycznego do punktu $P = (-4, 1)$ względem prostej $y = 3x + 3$. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Kartkówka 1: prosta prostopadła i styczna do okręgu – grupa B

15 minut · 9 pkt

KARTA 5/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 9 pkt

Zadanie 1. Prosta prostopadła do prostej $3x + 6y - 1 = 0$, przechodząca przez punkt $(-3, 1)$, ma równanie ___ / 1 pkt

A. $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

B. $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

C. $y = -2x - 5$

D. $y = 2x + 7$

Zadanie 2. Uzupełnij. ___ / 2 pkt

1. Współczynnik kierunkowy prostej nachylonej do osi Ox pod kątem $120°$ jest równy _____
2. Współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej $y = \frac{3}{5}x - 2$ jest równy _____

Zadanie 3. Wyznacz równanie stycznej do okręgu $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 17$ w punkcie $T = (3, 1)$. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 4. Wyznacz współrzędne punktu Q symetrycznego do punktu $P = (5, -2)$ względem prostej $y = -2x + 3$. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Kartkówka 2: wektory i podział odcinka – grupa A

KARTA 6/9

15 minut · 9 pkt

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 9 pkt

Zadanie 1. Dane są punkty $A = (-2, 3)$, $B = (4, -5)$ i wektor $\vec{u} = [1, 2]$. Uzupełnij. ___ / 3 pkt

1. $\overrightarrow{AB} =$ _____ 2. $|\overrightarrow{AB}| =$ _____ 3. $\overrightarrow{AB} - 2 \cdot \vec{u} =$ _____

Zadanie 2. Wektory $[m, 4]$ i $[3, 6]$ są równoległe dla m równego ___ / 1 pkt

A. $\frac{1}{2}$ **B.** 8 **C.** 2 **D.** -2

Zadanie 3. Dane są punkty $A = (-3, 1)$ i $B = (5, 5)$. Wyznacz współrzędne punktu P odcinka AB, dla którego $|AP| : |PB| = 1 : 3$. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 4. Punkty $A = (-3, -2)$, $B = (3, 0)$ i $D = (-1, 4)$ są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C i oblicz długość przekątnej BD. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Sprawdzian: Geometria analityczna – zakres rozszerzony – grupa A

45 minut · 23 pkt

KARTA 8/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 23 pkt

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Prosta prostopadła do prostej $y = -\frac{3}{4}x + 2$, przechodząca przez początek układu współrzędnych, ma równanie

___ / 1 pkt

A. $y = -\frac{4}{3}x$

B. $y = -\frac{3}{4}x$

C. $y = \frac{3}{4}x$

D. $y = \frac{4}{3}x$

Zadanie 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Okręgi o równaniach $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ i $(x + 4)^2 + (y - 7)^2 = 49$

___ / 1 pkt

A. przecinają się w dwóch punktach

B. są styczne zewnętrznie

C. nie mają punktów wspólnych

D. są styczne wewnętrznie

Zadanie 3. Dane są wektory $\vec{u} = [3, -1]$ i $\vec{v} = [-6, 2]$.
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

___ / 1 pkt

1. Wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są równoległe.	**P**	**F**
2. Wektor $\vec{u} - \vec{v}$ ma długość 9.	**P**	**F**

Zadanie 4. Prosta k jest styczna do okręgu $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 20$ w punkcie $T = (3, 3)$. Wyznacz równanie prostej k i współrzędne punktu, w którym prosta k przecina oś Ox. Zapisz obliczenia.

___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Geometria analityczna – zakres rozszerzony – kartkówki, sprawdzian i karty pracy z powtórką, matematyka, klasa 3 LO i technikum (zakres

Podgląd pokazał 12 z 40 stron. Pełna wersja: 40 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Geometria analityczna – zakres rozszerzony – najważniejsze wiadomości – 4 zadania, 11 pkt
- Karta 2: Geometria analityczna – zakres rozszerzony – ćwiczenia – 8 zadań, 28 pkt
- Karta 3: Geometria analityczna – zakres rozszerzony – zadania typu maturalnego – 7 zadań, 29 pkt
- Karta 4: Kartkówka 1: prosta prostopadła i styczna do okręgu – grupa A – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 5: Kartkówka 1: prosta prostopadła i styczna do okręgu – grupa B – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 6: Kartkówka 2: wektory i podział odcinka – grupa A – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 7: Kartkówka 2: wektory i podział odcinka – grupa B – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 8: Sprawdzian: Geometria analityczna – zakres rozszerzony – grupa A – 8 zadań, 23 pkt
- Karta 9: Sprawdzian: Geometria analityczna – zakres rozszerzony – grupa B – 8 zadań, 23 pkt
Karta 1 przypomina teorię i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku.

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail
pierwszalawka.pl/material/matematyka-liceum-klasa-3-zr-dzial-15-geometria-analityczna-zakres-rozszerzony