ROZDZIAŁ 3

Mechanika bryły sztywnej

Fizyka. Zbiór zadań maturalnych temat po temacie. Poziom rozszerzony 2027

W tym rozdziale

Zakres	III. Mechanika bryły sztywnej (podstawa programowa, zakres rozszerzony)
R. Repetytorium	Bryła sztywna, środek masy i kinematyka ruchu obrotowego; Moment siły i warunki równowagi bryły; Moment bezwładności; II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego. Toczenie bez poślizgu; Energia kinetyczna bryły; Moment pędu i zasada jego zachowania; ramki „Na maturze" i „Typowe błędy"
A. Zadania wprowadzające	zadania 1–6 · 19 punktów
B. Zadania maturalne	zadania 7–16 · 53 punkty
C. Zadania trudniejsze	zadania 17–20 · 33 punkty
Razem	20 zadań (56 poleceń, w tym 29 rachunkowych), 105 punktów
Rozwiązania	osobny plik: klucz do zadań zamkniętych, rozwiązania etapowe zadań rachunkowych, przykładowe odpowiedzi i zasady oceniania w układzie CKE (z wymaganiami podstawy programowej przy każdym poleceniu)

Jak pracować z rozdziałem

A	Zadania sprawdzające podstawowe pojęcia, prawa i zależności działu.
B	Zadania w formule egzaminu maturalnego (Formuła 2023): wiązki poleceń do wspólnego opisu sytuacji, rysunku, wykresu albo doświadczenia.
C	Zadania wymagające łączenia wiadomości z kilku działów, wieloetapowych obliczeń, wyprowadzeń i analizy danych pomiarowych.
Obliczenia	Zapisz zastosowane prawa i zależności, obliczenia pośrednie i wynik z jednostką. Stałe fizyczne bierz z broszury CKE albo z treści zadania („Przyjmij, że…").
Pomoce	Jak na maturze: *Wybrane wzory i stałe fizykochemiczne na egzamin maturalny z biologii, chemii i fizyki*, linijka, kalkulator naukowy. Symbole przy numerze zadania:  – potrzebny kalkulator,  – potrzebna linijka.

Opracowanie własne „Pierwsza Ławka". Zakres zgodny z podstawą programową kształcenia ogólnego – fizyka, zakres rozszerzony (Dz.U. 2024 poz. 1019), bez wymagań, z których nie przeprowadza się egzaminu maturalnego, oraz z Informatorem o egzaminie maturalnym z fizyki od roku szkolnego 2024/2025. Zbiór nie jest materiałem Centralnej Komisji Egzaminacyjnej. Typy zadań i zasady oceniania wzorowane na egzaminie maturalnym CKE.

R Repetytorium

Bryła sztywna, środek masy i kinematyka ruchu obrotowego

Bryła sztywna – ciało, w którym odległości między dowolnymi punktami się nie zmieniają. W ruchu obrotowym wokół nieruchomej osi wszystkie punkty bryły mają w danej chwili tę samą prędkość kątową ω i to samo przyspieszenie kątowe ε, ale prędkości liniowe $v = \omega r$ rosną z odległością r od osi.

Środek masy układu ciał (punktów) na osi x: $x_{sm} = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}$ (analogicznie y_{sm}). Środek masy jednorodnego pręta, krążka, kuli leży w środku symetrii. Siłę ciężkości bryły przykłada się w środku masy.

Ruch postępowy	Ruch obrotowy wokół osi	Związek (punkt w odległości r od osi)
droga s, m	kąt obrotu φ, rad	$s = \varphi r$
prędkość v, m/s	prędkość kątowa ω, rad/s	$v = \omega r$, $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$
przyspieszenie a, m/s²	przyspieszenie kątowe ε, rad/s²	$a_s = \varepsilon r$ (styczne)
$v = v_0 + at$, $s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$, $\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$	ruch jednostajnie zmienny

Moment siły i warunki równowagi bryły

Moment siły względem osi: $M = rF \sin\alpha$, gdzie r – odległość punktu przyłożenia siły od osi, α – kąt między $\vec{r}$ a $\vec{F}$. Inaczej: $M = F \cdot r_\perp$, gdzie **ramię siły** $r_\perp$ to odległość osi od *prostej, na której leży siła*. Jednostka: N·m (nie zapisujemy jej jako J). Siła, której prosta działania przechodzi przez oś, ma moment zero.

Warunki równowagi bryły sztywnej (statyka):

1. wypadkowa sił zewnętrznych jest równa zeru: $\Sigma\vec{F} = 0$;
2. wypadkowy moment sił zewnętrznych względem *dowolnej* osi jest równy zeru: suma momentów „w prawo” = suma momentów „w lewo”.

Oś do bilansu momentów wybiera się zwykle w punkcie, w którym działa nieznana siła – jej moment znika i liczba niewiadomych maleje.

Moment bezwładności

Moment bezwładności opisuje bezwładność bryły w ruchu obrotowym: $I = \Sigma m_i r_i^2$, jednostka kg·m². Zależy od masy, od **rozkładu masy względem osi** i od położenia osi – ta sama bryła ma różne momenty bezwładności względem różnych osi.

Bryła (masa m)	Oś obrotu	I
punkt materialny w odległości r	dowolna	mr^2
cienka obręcz, cienkościenna rura (promień R)	oś symetrii	mR^2
pełny walec, krążek (promień R)	oś symetrii	$\frac{1}{2}mR^2$
pełna kula (promień R)	przez środek	$\frac{2}{5}mR^2$
cienki pręt (długość L)	prostopadła, przez środek	$\frac{1}{12}mL^2$

cienki pręt (długość L)	prostopadła, przez koniec	$\frac{1}{3}mL^2$

Wartości z tabeli (z wyjątkiem punktu materialnego) nie występują w karcie wzorów CKE – jest tam tylko definicja $I = \Sigma m_i r_i^2$. W zadaniach maturalnych moment bezwładności bryły zwykle podaje się w treści („Przyjmij, że…"), warto jednak pamiętać wzory dla walca, kuli i pręta.

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego. Toczenie bez poślizgu

$\varepsilon = \frac{M_{wyp}}{I}$ – wypadkowy moment sił zewnętrznych względem osi nadaje bryle przyspieszenie kątowe odwrotnie proporcjonalne do jej momentu bezwładności względem tej osi.

Układy „bryła + ciało na nici": zapisz osobno II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego ciała ($ma = mg - N$) i dla ruchu obrotowego bryły ($I\varepsilon = NR$), a następnie związek $a = \varepsilon R$ (nić nie ślizga się). Siła naciągu nici nie jest równa ciężarowi ciała, gdy układ przyspiesza.

Toczenie bez poślizgu: $v_{sm} = \omega R$, $a_{sm} = \varepsilon R$. Siłą, która nadaje toczącej się bryle przyspieszenie kątowe względem osi przez środek masy, jest siła tarcia *statycznego* – jej wartość wynika z równań ruchu, a nie ze wzoru μN (ten opisuje tylko wartość maksymalną). Podczas toczenia bez poślizgu siła tarcia statycznego nie wykonuje pracy.

Energia kinetyczna bryły

Bryła obracająca się wokół nieruchomej osi: $E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$.

Bryła w ruchu postępowym i obrotowym (np. toczenie): $E_k = \frac{1}{2} mv_{sm}^2 + \frac{1}{2} I_{sm}\omega^2$, gdzie I_{sm} – moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy. Dla toczenia bez poślizgu i $I_{sm} = kmR^2$: $E_k = \frac{1}{2}(1 + k)\, mv_{sm}^2$.

Zasada zachowania energii mechanicznej obowiązuje, gdy nie działają siły rozpraszające (np. tarcie kinetyczne, opór powietrza). Praca stałego momentu siły przy obrocie o kąt φ: $W = M\varphi$.

Energia potencjalna bryły w polu grawitacyjnym: $E_p = mgh_{sm}$ – liczy się wysokość *środka masy*.

Moment pędu i zasada jego zachowania

Moment pędu punktu materialnego względem osi: $L = mvr \sin\alpha$ (dla ruchu po okręgu o promieniu r: $L = mvr$). **Moment pędu bryły** obracającej się wokół osi symetrii: $L = I\omega$. Jednostka: kg·m²/s (= J·s).

Moment pędu jest wektorem leżącym na osi obrotu; zwrot wyznacza reguła prawej dłoni (palce zgodnie z obrotem, kciuk wskazuje zwrot $\vec{L}$).

Uogólnienie II zasady dynamiki: $M_{wyp} = \frac{\Delta L}{\Delta t}$. **Zasada zachowania momentu pędu**: jeśli wypadkowy moment sił zewnętrznych względem osi jest równy zeru, to całkowity moment pędu układu względem tej osi się nie zmienia: $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$ (dla układu ciał – suma momentów pędu). Energia kinetyczna przy tym zachowana być nie musi (zderzenia niesprężyste, praca mięśni).

Doświadczenia: krzesło obrotowe z ciężarkami w rękach albo z wirującym kołem rowerowym (zachowanie momentu pędu); staczanie się z równi brył o tej samej masie i różnym rozkładzie masy (wpływ momentu bezwładności).

Na maturze

- Polecenia z działu mają postać „Oblicz…", „Wyznacz … – w zależności tylko od …", „Wykaż, że…", „Oceń prawdziwość…", „Narysuj siły działające na … z zachowaniem

punktów przyłożenia". W „wyznacz" wynik może zawierać **wyłącznie** wielkości z listy.

- W zasadach oceniania CKE za układ „bryła + ciało" punkty przyznaje się etapami: za II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego, za II zasadę dla ruchu obrotowego z poprawnym momentem siły, za związek $a = \varepsilon R$ i moment bezwładności, a pełne punkty – za wynik. Zwykle akceptowane są trzy sposoby: dynamiczny, energetyczny i chwilowej osi obrotu.
- W statyce trzeba zapisać oba warunki równowagi albo bilans momentów względem dobrze wybranej osi; rysunek sił musi mieć właściwe punkty przyłożenia (siła ciężkości – w środku masy).
- Wynik podaje się z jednostką i z dokładnością wynikającą z danych (zwykle 2–3 cyfry znaczące); kąt obrotu w radianach albo jako liczba obrotów – tak, jak każe polecenie.

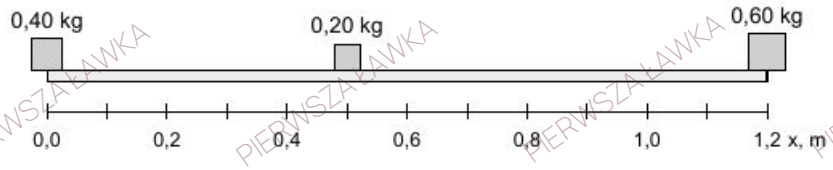
Typowe błędy

Tak traci się punkty	Tak jest dobrze	Dlaczego
Siła naciągu nici, na której wisi ciężarek, jest równa sile tarcia działającej na toczący się walec; zwrot siły tarcia przyjęty „na oko".	Siły wyznacza się z układu równań: II zasady dla ruchu postępowego i obrotowego każdej bryły oraz związku $a = \varepsilon R$.	Wartości siły tarcia statycznego i naciągu nici wynikają z równań ruchu – nie są z góry równe; zwrot tarcia trzeba ustalić z warunku toczenia.
Zapisanie II zasady dynamiki tylko dla ruchu postępowego albo tylko dla obrotowego toczącego się walca, z siłą wypadkową F zamiast $F - T$.	Dwa równania: $ma = F_{wyp}$ (z uwzględnieniem siły tarcia) oraz $I\varepsilon = TR$, a do tego $a = \varepsilon R$.	Toczący się walec wykonuje jednocześnie ruch postępowy i obrotowy – jedno równanie nie wystarcza do wyznaczenia dwóch niewiadomych.
„Zasada zachowania momentów sił" $M_1 = M_2$ w układzie, który przyspiesza; moment siły tarcia liczony jako $F \cdot R$ zamiast $T \cdot R$.	Moment liczy się dla każdej siły osobno względem wybranej osi; w ruchu przyspieszonym suma momentów jest równa $I\varepsilon$, a nie zeru.	Takiej zasady nie ma: zachowuje się (w określonych warunkach) moment pędu albo energia; przy osi chwilowej trzeba użyć I względem tej osi.
Siła tarcia statycznego przy toczeniu bez poślizgu po równi zapisana jako $\mu mg\cos\alpha$.	Siłę tarcia statycznego traktuje się jako niewiadomą T i wyznacza z równań ruchu.	Wzór μN opisuje tarcie kinetyczne albo graniczną wartość tarcia statycznego – podczas toczenia bez poślizgu tarcie zwykle jej nie osiąga.
Bryły o równych masach staczające się z tej samej wysokości mają u dołu równe prędkości, bo mają równe energie kinetyczne.	Równe są energie całkowite; bryła o większym I ma większą część energii w ruchu obrotowym, więc mniejszą prędkość środka masy.	$E_k = \frac{1}{2}(1 + k)\,mv^2$ – przy tej samej energii prędkość zależy od współczynnika k opisującego rozkład masy.
Przy metodzie energetycznej praca siły hamującej zapisana ze znakiem „+" albo zmiana energii jako „początkowa − końcowa".	$\Delta E = E_{konc} - E_{pocz} = W$, przy czym praca siły skierowanej przeciwnie do ruchu jest ujemna.	Pomylenie znaku pracy lub kolejności odejmowania prowadzi do błędnego wyniku nawet przy poprawnym zapisie energii.

A Zadania wprowadzające

Zadanie 1. (0–3)

Na lekkiej listwie o długości 1,20 m przymocowano trzy małe ciężarki: o masie 0,40 kg na lewym końcu listwy ($x = 0$), o masie 0,20 kg w odległości 0,50 m od lewego końca i o masie 0,60 kg na prawym końcu. Masę listwy pomijamy.



Zadanie 1.1. (0–2)

Oblicz odległość środka masy układu od lewego końca listwy. Zapisz obliczenia.

Obliczenia

Zadanie 1.2. (0–1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

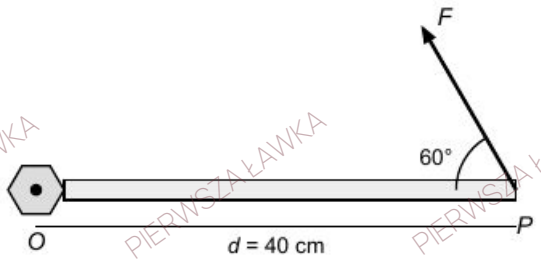
1.	Gdyby masę każdego z trzech ciężarków podwoić, środek masy układu przesunąłby się w stronę prawego końca listwy.	**P**	**F**
2.	Gdyby na prawym końcu listwy dołożyć jeszcze jeden ciężarek o masie 0,20 kg, środek masy przesunąłby się w prawo.	**P**	**F**

Zadanie 2. (0–3)

Kierowca odkręca nakrętkę koła samochodu kluczem. Działa siłą $\vec{F}$ o wartości 180 N przyłożoną w punkcie P na końcu klucza, w odległości $d = 40$ cm od osi śruby O. Kierunek siły tworzy z ramieniem klucza kąt 60° (zobacz rysunek – widok wzdłuż osi śruby).

Zadanie 2.1. (0–1)

Na rysunku narysuj prostą, na której leży siła $\vec{F}$, i zaznacz ramię tej siły względem osi O (oznacz je literą r).



Zadanie 2.2. (0–2)

Oblicz wartość momentu siły $\vec{F}$ względem osi śruby. Zapisz obliczenia.

Obliczenia

Zadanie 3. (0–3)

Model hantli składa się z dwóch jednakowych ciężarków o masie 1,5 kg każdy, zamocowanych na końcach lekkiego pręta o długości 0,80 m. Ciężarki traktujemy jak punkty materialne, a masę pręta pomijamy.

Zadanie 3.1. (0–2)

Oblicz moment bezwładności modelu względem osi prostopadłej do pręta: a) przechodzącej przez jego środek, b) przechodzącej przez jeden z jego końców. Zapisz obliczenia.

Obliczenia

Zadanie 3.2. (0–1)

Uzupełnij zdanie. Wybierz właściwe określenia spośród podanych w nawiasach.

Gdyby oba ciężarki przesunąć do połowy odległości od środka pręta, moment bezwładności modelu względem osi przechodzącej przez środek (wzrósłby dwukrotnie / zmalałby dwukrotnie / zmalałby czterokrotnie), a masa modelu (wzrosłaby / zmalałaby / nie zmieniłaby się).

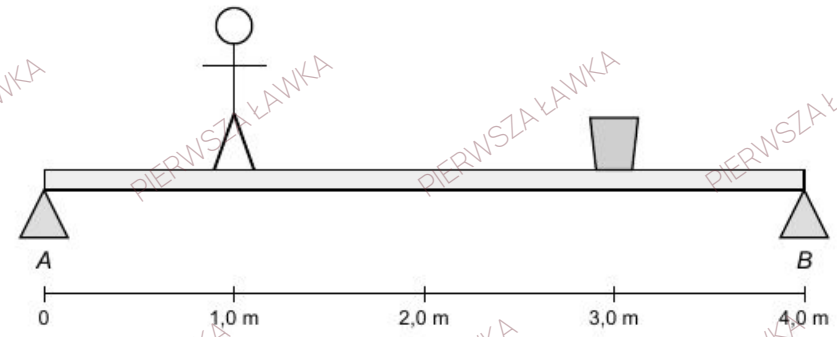
B Zadania maturalne

Zadanie 7. (0–6)

Jednorodny pomost rusztowania o długości 4,0 m i masie 30 kg spoczywa poziomo na dwóch podporach *A* i *B* umieszczonych na jego końcach. Malarz o masie 75 kg stoi w odległości 1,0 m od podpory *A*, a wiadro z farbą o masie 12 kg stoi w odległości 3,0 m od podpory *A*.

Zadanie 7.1. (0–2)

Na rysunku narysuj i nazwij wszystkie siły działające na pomost. Zachowaj punkty przyłożenia i kierunki sił. Długości wektorów nie są oceniane.



Zadanie 7.2. (0–3)

Oblicz wartości sił, jakimi podpory *A* i *B* działają na pomost. Zapisz obliczenia.

Obliczenia

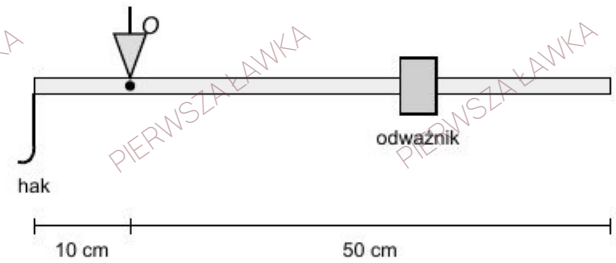
Zadanie 7.3. (0–1)

Malarz przechodzi powoli od miejsca, w którym stoi, w stronę podpory *B*. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Wartość siły reakcji podpory *A* rośnie.	**P**	**F**
2.	Suma wartości sił reakcji obu podpór się nie zmienia.	**P**	**F**

Zadanie 14. (0–5)

Bezmian to dawna waga z jednym ramieniem i przesuwnym odważnikiem. Pręt bezmianu (razem z hakiem) ma masę 0,50 kg i jest zawieszony na osi *O*. Hak, na którym wiesza się ważony towar, znajduje się w odległości 10 cm od osi; po drugiej stronie osi pręt ma długość 50 cm. Środek masy pręta z hakiem leży po stronie haka, w odległości 4 cm od osi. Po pręcie przesuwa się odważnik o masie 0,40 kg, który traktujemy jak punkt materialny. Pręt jest w równowadze, gdy jest poziomy.



Zadanie 14.1. (0–2)

Oblicz największą masę towaru, którą można zważyć tym bezmianem. Zapisz obliczenia.

Obliczenia

Zadanie 14.2. (0–1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń dotyczących podziałki bezmianu. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Bez towaru na haku pręt jest w równowadze, gdy odważnik znajduje się dokładnie nad osią *O*.	**P**	**F**
2.	Przesunięcie odważnika o tę samą odległość odpowiada zawsze tej samej zmianie masy towaru (podziałka jest równomierna).	**P**	**F**

Zadanie 14.3. (0–2)

Oblicz odległość od osi *O*, w jakiej należy ustawić odważnik, aby pusty bezmian (bez towaru na haku) był w równowadze. Po której stronie osi leży to miejsce? Zapisz obliczenia.

Obliczenia

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Matura 2027 z fizyki (poziom rozszerzony) – zbiór zadań, rozdział 3: Mechanika bryły sztywnej – repetytorium, zadania i zasady oceniania

Podgląd pokazał 8 z 25 stron. Pełna wersja: 25 stron A4, PDF do druku.

- Zadania (25 stron): repetytorium działu (Bryła sztywna, środek masy i kinematyka ruchu obrotowego, Moment siły i warunki równowagi bryły, Moment bezwładności, II zasada dynamiki dl
- Rozwiązania (24 strony): klucz do zadań zamkniętych, rozwiązania zadań rachunkowych krok po kroku, przykładowe odpowiedzi do zadań otwartych i zasady oceniania w układzie CKE – za

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail
pierwszalawka.pl/material/fizyka-matura-zbior-zadan-rozdzial-03-bryla-sztywna