PIERWSZA ŁAWKA · ZESTAW DZIAŁOWY · MATEMATYKA · KLASA 2 LO I TECHNIKUM · ZAKRES PODSTAWOWY

Dział 4. Wyrażenia wymierne i proste równania wymierne

Dziedzina wyrażenia wymiernego, skracanie, mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych, proste równania wymierne (przekształcenia równoważne, założenia, liczba rozwiązań), funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$ i jej przesunięcia, wielkości odwrotnie proporcjonalne w zastosowaniach. Dziewięć kart: teoria z przykładami, ćwiczenia, zadania typu maturalnego, dwie kartkówki (A i B) i sprawdzian (A i B) – z kluczem i zasadami oceniania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Wyrażenia wymierne i proste równania wymierne – najważniejsze wiadomości** Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka	3 zad. 7 pkt
2	**Wyrażenia wymierne i proste równania wymierne – ćwiczenia** Ćwiczę umiejętności z działu	8 zad. 23 pkt
3	**Wyrażenia wymierne i proste równania wymierne – zadania typu maturalnego** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	8 zad. 11 pkt
4	**Kartkówka 1: działania na wyrażeniach wymiernych – grupa A** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
5	**Kartkówka 1: działania na wyrażeniach wymiernych – grupa B** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
6	**Kartkówka 2: równania wymierne i proporcjonalność odwrotna – grupa A** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
7	**Kartkówka 2: równania wymierne i proporcjonalność odwrotna – grupa B** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
8	**Sprawdzian: Wyrażenia wymierne i proste równania wymierne – grupa A** 45 minut · 21 pkt	10 zad. 21 pkt
9	**Sprawdzian: Wyrażenia wymierne i proste równania wymierne – grupa B** 45 minut · 21 pkt	10 zad. 21 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 przypomina najważniejsze wiadomości z działu i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku – od niej warto zacząć.
- Karta 2 to ćwiczenia, a karta 3 – zadania w formule matury 2027 (polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE).
- Karty 4–7 to dwie kartkówki (po 15 minut), każda w grupach A i B. Karty 8–9 to sprawdzian (45 minut) w grupach A i B – te same typy zadań i ta sama punktacja, inne liczby.
- Klucz na końcu zestawu zawiera odpowiedzi, przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE (kamienie milowe, błąd rachunkowy = −1 pkt).
- Osobny plik „Powtórka" zbiera definicje, wzory (z zaznaczeniem, które są w karcie wzorów CKE), typowe błędy i test „Sprawdź się".

Materiał oryginalny. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: II.4, III.1, V.13 (w tle V.12, III.4, II.1, II.3); cele ogólne I, III.1–III.2. Miejsce w seriach podręczników: NE kl. 2 · Pazdro kl. 3 · GWO kl. 3 · technikum NE kl. 3. Nazwy wydawnictw i serii podano tylko informacyjnie – materiał nie jest z nimi powiązany. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

PIERWSZA ŁAWKA

Wyrażenia wymierne i proste równania wymierne – najważniejsze wiadomości

Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka

KARTA 1/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 7 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Wyrażenie wymierne** to iloraz dwóch wielomianów, np. $\frac{x+1}{x^2-4}$. Ma ono sens liczbowy tylko dla tych x, dla których mianownik jest różny od zera. Zbiór tych liczb to **dziedzina** wyrażenia – tu $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.
- **Dziedzina krok po kroku:** rozłóż mianownik na czynniki (wyłączanie przed nawias, wzory skróconego mnożenia) i wyklucz liczby, dla których któryś czynnik jest równy 0: $x^2 + 5x = x(x+5) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ i $x \neq -5$. Mianownik $x^2 + 1$ nie jest równy zeru dla żadnego x.
- **Skracanie:** licznik i mianownik rozkładamy na czynniki i dzielimy je przez wspólny **czynnik**, nigdy przez składnik: $\frac{x^2-4}{x^2+2x} = \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)} = \frac{x-2}{x}$ dla $x \neq 0$ i $x \neq -2$. Założenie zapisujemy przed skróceniem – skracanie nie zmienia dziedziny.
- **Mnożenie i dzielenie:** $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$ oraz $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$. Przy dzieleniu dochodzi warunek, że dzielnik nie jest zerem ($C \neq 0$), więc wykluczamy też miejsca zerowe licznika dzielnika. Najpierw rozkładamy, potem skracamy, na końcu mnożymy.
- **Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych** (wspólny mianownik), równania postaci „ułamek = 0” z licznikiem i mianownikiem w postaci iloczynowej oraz nierówności wymierne to **zakres rozszerzony** – w tym dziale ich nie wymagamy.
- **Równanie wymierne** (III.1) rozwiązujemy w czterech krokach: 1) założenie – mianowniki różne od 0; 2) mnożymy obie strony przez mianowniki (w proporcji „na krzyż”) – w dziedzinie to przekształcenie równoważne; 3) rozwiązujemy otrzymane równanie liniowe lub kwadratowe; 4) odrzucamy liczby spoza dziedziny i zapisujemy odpowiedź.
- **Liczba rozwiązań a dziedzina:** równanie $\frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{x-1}$ po pomnożeniu przez $x - 1$ daje $x^2 = 1$, ale $x = 1$ nie należy do dziedziny – zostaje jedno rozwiązanie $x = -1$. Zamiast założenia można sprawdzić otrzymane liczby w równaniu wyjściowym (metoda analizy starożytnych).
- **Funkcja** $f(x) = \frac{a}{x}$, $a \neq 0$: wykres to hiperbola, dziedzina i zbiór wartości to $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$ powstaje z hiperboli $y = \frac{a}{x}$ przez przesunięcie o p jednostek wzdłuż osi Ox i o q jednostek wzdłuż osi Oy. Dziedzina to $\mathbb{R} \setminus \{p\}$, zbiór wartości – $\mathbb{R} \setminus \{q\}$, a proste $x = p$ i $y = q$ są **asymptotami** wykresu (wykres zbliża się do nich, ale ich nie przecina).

- **Znak *p*:** w $y = \frac{3}{x+2}$ jest $x + 2 = x - (-2)$, więc $p = -2$ – przesunięcie o 2 jednostki **w lewo**. Dla $a > 0$ funkcja $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$ jest malejąca w przedziale $(-\infty, p)$ i w przedziale $(p, +\infty)$, a dla $a < 0$ – rosnąca w każdym z nich.
- **Wielkości odwrotnie proporcjonalne:** $y = \frac{a}{x}$, czyli $x \cdot y = a$ – iloczyn jest stały. Ile razy zwiększymy jedną wielkość, tyle razy zmniejszy się druga (prędkość i czas przy stałej drodze, liczba jednakowych maszyn i czas pracy, liczba osób i koszt na osobę). W „Wybranych wzorach matematycznych" CKE nie ma wyrażeń wymiernych ani funkcji $\frac{a}{x}$.

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. Wyznacz dziedzinę wyrażenia $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$ i skróć to wyrażenie.

Mianownik: $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ i $x \neq -3$. Dziedzina: $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

Licznik: $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

$\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)} = \frac{x-3}{x+3}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

Przykład 2. Wykonaj dzielenie $\frac{x^2 - 25}{2x} : \frac{x + 5}{4x^2}$ i podaj konieczne założenia.

Założenia: mianowniki $2x \neq 0$ i $4x^2 \neq 0$, więc $x \neq 0$; dzielnik różny od zera: $x + 5 \neq 0$, więc $x \neq -5$.

$\frac{(x-5)(x+5)}{2x} \cdot \frac{4x^2}{x+5} = \frac{(x-5) \cdot 4x^2}{2x} = 2x(x - 5) = 2x^2 - 10x$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 0\}$.

Przykład 3. Rozwiąż równanie $\frac{3}{x-1} = \frac{x+1}{x+3}$.

Założenie: $x \neq 1$ i $x \neq -3$.

Mnożymy „na krzyż": $3(x + 3) = (x + 1)(x - 1)$, czyli $3x + 9 = x^2 - 1$, stąd $x^2 - 3x - 10 = 0$.

$\Delta = 9 + 40 = 49$, $x = \frac{3-7}{2} = -2$ lub $x = \frac{3+7}{2} = 5$.

Obie liczby należą do dziedziny. Odpowiedź: $x = -2$ lub $x = 5$.

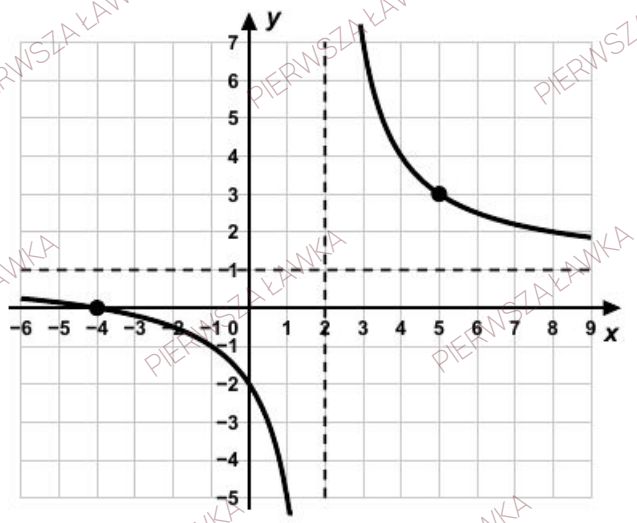
Przykład 4. Rozwiąż równanie $\frac{2x + 1}{x - 4} = \frac{9}{x - 4}$.

Założenie: $x \neq 4$.

Mnożymy obie strony przez $x - 4$: $2x + 1 = 9$, więc $x = 4$.

Liczba 4 nie należy do dziedziny (mianownik byłby równy 0). Równanie **nie ma rozwiązań**.

Przykład 5. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{6}{x-2} + 1$. Podaj dziedzinę, zbiór wartości i asymptoty wykresu. Oblicz $f(5)$ i wyznacz miejsce zerowe funkcji f.



Hiperbolę $y = \frac{6}{x}$ przesunięto o 2 jednostki w prawo i o 1 jednostkę w górę. Dziedzina: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, zbiór wartości: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, asymptoty: $x = 2$ i $y = 1$.

$f(5) = \frac{6}{3} + 1 = 3$.

Miejsce zerowe: $\frac{6}{x-2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{6}{x-2} = -1 \Leftrightarrow x - 2 = -6 \Leftrightarrow x = -4$.

Przykład 6. Samochód pokonuje trasę 240 km. Czas przejazdu t (w godzinach) zależy od średniej prędkości v (w km/h). Zapisz wzór $t(v)$. O ile trzeba zwiększyć średnią prędkość, aby czas przejazdu skrócił się z 4 h do 3 h?

$t \cdot v = 240$, czyli $t(v) = \frac{240}{v}$ dla $v > 0$ – czas jest odwrotnie proporcjonalny do prędkości.

Dla $t = 4$: $v = \frac{240}{4} = 60$ km/h; dla $t = 3$: $v = \frac{240}{3} = 80$ km/h.

Prędkość trzeba zwiększyć o 20 km/h.

ZADANIA

Zadanie 1. Wyznacz dziedzinę wyrażenia. ___ / 3 pkt

1. $\frac{5}{x-7}$: _____
2. $\frac{x}{x^2-16}$: _____
3. $\frac{3x}{x^2+1}$: _____

Zadanie 2. Dla każdej liczby rzeczywistej x różnej od −4 i od 4 wyrażenie $\frac{x^2-4x}{x^2-16}$ jest równe ___ / 1 pkt

A. $\frac{x}{x+4}$ **B.** $\frac{1}{x+4}$ **C.** $\frac{x-4}{x+4}$ **D.** $\frac{x}{4}$

Podgląd • Pierwsza Ławka

Wyrażenia wymierne i proste równania wymierne – ćwiczenia

KARTA **2/9**

Ćwiczę umiejętności z działu

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 23 pkt

Zadanie 1. Skróć wyrażenie (zakładamy, że x należy do jego dziedziny). ___ / 3 pkt

1. $\frac{3x+6}{x^2-4} =$ _____

2. $\frac{x^2+5x}{x^2+10x+25} =$ _____

3. $\frac{x^2-1}{1-x} =$ _____

Zadanie 2. Wykonaj działania i zapisz wynik w najprostszej postaci (zakładamy, że x należy do dziedziny). ___ / 3 pkt

1. $\frac{x^2-9}{4x} \cdot \frac{8x^2}{x+3} =$ _____

2. $\frac{5x-10}{x+1} \cdot \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x} =$ _____

3. $\frac{x+2}{x^2-x} : \frac{x^2-4}{x^2} =$ _____

Zadanie 3. Wyrażenie $\frac{x-1}{x+2} : \frac{x-3}{x}$ ma sens liczbowy dla ___ / 1 pkt

A. $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1, 3\}$ **B.** $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$

C. $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$ **D.** $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 3\}$

Zadanie 4. Rozwiąż równania. a) $\frac{2x-1}{x+3} = \frac{3}{4}$ **b)** $\frac{x}{x-2} = \frac{x+3}{x}$ **c)** $\frac{x^2}{x+5} = \frac{25}{x+5}$ ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 5. Dopasuj do każdego równania (1–4) liczbę jego rozwiązań (a–e). Jedna odpowiedź nie pasuje do żadnego równania. ___ / 4 pkt

1. $\frac{x+1}{x-1} = 2$
2. $\frac{x-3}{x-3} = 1$
3. $\frac{2x}{x-4} = \frac{8}{x-4}$
4. $\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$

a) nie ma rozwiązań

b) ma dokładnie jedno rozwiązanie

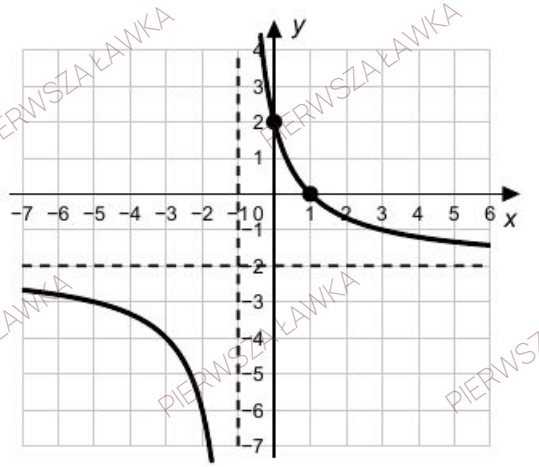
c) ma dokładnie dwa rozwiązania

d) ma nieskończenie wiele rozwiązań

e) ma dokładnie trzy rozwiązania

1 ____ 2 ____ 3 ____ 4 ____

Zadanie 6. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{4}{x+1} - 2$. Uzupełnij. ___ / 4 pkt



1. dziedzina funkcji f: _____
2. zbiór wartości funkcji f: _____
3. asymptota pionowa wykresu: _____
4. miejsce zerowe funkcji f: _____

Zadanie 7. Wykres funkcji $g(x) = \frac{a}{x-3} + 2$ przechodzi przez punkt $P = (5, 6)$. Wyznacz a. Sprawdź, czy liczba −1 jest miejscem zerowym funkcji g. ___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Wyrażenia wymierne i proste równania wymierne – zadania typu maturalnego

Polecenia i punktacja jak na maturze 2027

KARTA 3/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 11 pkt

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Dla każdej liczby rzeczywistej x różnej od 0 oraz różnej od 3 wartość wyrażenia $\frac{x^2-6x+9}{2x}\cdot\frac{4x^2}{x^2-3x}$ jest równa wartości wyrażenia ___ / 1 pkt

A. $2x(x-3)$ **B.** $\frac{2(x-3)}{x}$ **C.** $2x-6$ **D.** $\frac{x-3}{2}$

Zadanie 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Dla każdej liczby rzeczywistej x różnej od -4 oraz różnej od 0 wartość wyrażenia $\frac{x^2-16}{x^2}:\frac{x+4}{3x}$ jest równa wartości wyrażenia ___ / 1 pkt

A. $\frac{(x-4)(x+4)^2}{3x^3}$ **B.** $\frac{3x-12}{x}$ **C.** $\frac{x-4}{3x}$ **D.** $\frac{3(x+4)}{x}$

Zadanie 3. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Rozwiązaniem równania $\frac{x-3}{2x+1}=\frac{1}{4}$ jest liczba ___ / 1 pkt

A. $\frac{13}{2}$ **B.** $\frac{13}{6}$ **C.** $\frac{11}{2}$ **D.** $-\frac{1}{2}$

Zadanie 4. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Równanie $\frac{x^2-x}{x-3}=\frac{6}{x-3}$ w zbiorze liczb rzeczywistych ___ / 1 pkt

A. ma dokładnie jedno rozwiązanie: 3.

B. ma dokładnie dwa rozwiązania: -2 oraz 3.

C. ma dokładnie jedno rozwiązanie: -2.

D. nie ma rozwiązań.

Zadanie 5. Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\frac{6}{x+2}-3$ dla każdej liczby rzeczywistej $x\neq -2$.
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Zbiorem wartości funkcji f jest zbiór $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.	**P**	**F**
2. Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-2, +\infty)$.	**P**	**F**

Podgląd • Pierwsza Ławka

Kartkówka 1: działania na wyrażeniach wymiernych – grupa A

15 minut · 8 pkt

KARTA 4/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

Zadanie 1. Wyznacz dziedzinę wyrażenia. ___ / 2 pkt

1. $\frac{2x+1}{x^2-5x}$: _____
2. $\frac{x-3}{x^2-49}$: _____

Zadanie 2. Dla każdej liczby rzeczywistej x różnej od -5 i od 5 wyrażenie $\frac{x^2-10x+25}{x^2-25}$ jest równe ___ / 1 pkt

A. $x-5$ **B.** $\frac{x-5}{x+5}$ **C.** $\frac{x+5}{x-5}$ **D.** $\frac{1}{x+5}$

Zadanie 3. Wykonaj mnożenie $\frac{x^2-4}{3x} \cdot \frac{6x^2}{x^2+2x}$. Podaj konieczne założenia i zapisz wynik w najprostszej postaci. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 4. Wykonaj dzielenie $\frac{x^2+3x}{x-2} : \frac{x^2-9}{x^2-4x+4}$. Podaj konieczne założenia i zapisz wynik w najprostszej postaci. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Sprawdzian: Wyrażenia wymierne i proste równania wymierne – grupa A

45 minut · 21 pkt

KARTA 8/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 21 pkt

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyrażenie $\frac{x+5}{x^3-4x}$ jest określone dla ___ / 1 pkt

A. $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$

B. $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -2, 0, 2\}$

C. $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$

D. $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

Zadanie 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla każdej liczby rzeczywistej x różnej od −5, 0 i 5 wartość wyrażenia $\frac{x^2-25}{x^2+5x} \cdot \frac{2x}{x-5}$ jest równa ___ / 1 pkt

A. $2x$ **B.** $\frac{2}{x}$ **C.** $\frac{2(x-5)}{x+5}$ **D.** 2

Zadanie 3. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{4}{x-3} + 1$ dla $x \neq 3$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Prosta $x = 3$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji f.	**P**	**F**
2. Punkt (5, 2) należy do wykresu funkcji f.	**P**	**F**

Zadanie 4. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie $\frac{x^2+3x}{x+5} = \frac{10}{x+5}$ w zbiorze liczb rzeczywistych ___ / 1 pkt

A. ma dokładnie jedno rozwiązanie: 2.

B. ma dokładnie jedno rozwiązanie: −5.

C. ma dokładnie dwa rozwiązania: −5 oraz 2.

D. nie ma rozwiązań.

Zadanie 5. Ciśnienie gazu p (w hPa) w stałej temperaturze jest odwrotnie proporcjonalne do jego objętości V (w litrach). Dla $V = 4$ ciśnienie wynosi 1500 hPa.

Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe. ___ / 2 pkt

1. Dla objętości 6 litrów ciśnienie gazu jest równe _____ hPa.
2. Ciśnienie 2000 hPa gaz ma przy objętości _____ litrów.

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Wyrażenia wymierne i proste równania wymierne – kartkówki, sprawdzian i karty pracy z powtórką, matematyka, klasa 2 LO i technikum (zakres

Podgląd pokazał 10 z 31 stron. Pełna wersja: 31 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Wyrażenia wymierne i proste równania wymierne – najważniejsze wiadomości – 3 zadania, 7 pkt
- Karta 2: Wyrażenia wymierne i proste równania wymierne – ćwiczenia – 8 zadań, 23 pkt
- Karta 3: Wyrażenia wymierne i proste równania wymierne – zadania typu maturalnego – 8 zadań, 11 pkt
- Karta 4: Kartkówka 1: działania na wyrażeniach wymiernych – grupa A – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 5: Kartkówka 1: działania na wyrażeniach wymiernych – grupa B – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 6: Kartkówka 2: równania wymierne i proporcjonalność odwrotna – grupa A – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 7: Kartkówka 2: równania wymierne i proporcjonalność odwrotna – grupa B – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 8: Sprawdzian: Wyrażenia wymierne i proste równania wymierne – grupa A – 10 zadań, 21 pkt
- Karta 9: Sprawdzian: Wyrażenia wymierne i proste równania wymierne – grupa B – 10 zadań, 21 pkt Karta 1 przypomina teorię i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku.

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matematyka-liceum-klasa-2-dzial-04-wyrazenia-wymierne-i-proste-rownania-wymierne