Zadania z kilkoma etapami

zadania za 5 pkt: rozwiązania w przedziale, kilka warunków jednocześnie, nierówność z parametrem, dowód

KARTA **5/6**

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 30 pkt

Zadanie 1. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 - 2(k-1)x + 3k - 3$ z parametrem k. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których ta funkcja ma dwa różne miejsca zerowe należące do przedziału $(-1, 4)$. Zapisz obliczenia. ___ / 5 pkt

Zadanie 2. Dane jest równanie $x^2 - (2k+1)x + k^2 - 2 = 0$ z parametrem k. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których to równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające jednocześnie warunki: $|x_1 - x_2| < 5$, $x_1 x_2 < 3$ oraz $x_1 + x_2 > -2$. Zapisz obliczenia. ___ / 5 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Parametr i zadania wieloetapowe (4–5 pkt)

KARTA 5/6

Równania dwukwadratowe i wymierne z parametrem, wielomian z warunkami, nierówność dla wszystkich x, dowód.

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 29 pkt

Zadanie 1. Dane jest równanie $x^4 - 2mx^2 + 3m - 2 = 0$ z parametrem m. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których to równanie ma cztery różne rozwiązania rzeczywiste. Zapisz obliczenia. ___ / 5 pkt

Zadanie 2. Równanie $x^2 - 6|x| + m = 0$ zależy od parametru m. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których to równanie ma dokładnie cztery rozwiązania rzeczywiste. Zapisz obliczenia. ___ / 5 pkt

Zadanie 3. Rozważ równanie $\frac{x^2 - (m+2)x + 4m - 8}{x - 2} = 0$ z parametrem m. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których to równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste. Zapisz obliczenia. ___ / 5 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Dowody i parametry

Zadania za 4–5 pkt: dowody o ciągach, szereg i granica z parametrem, figury i szereg.

KARTA **5/6**

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 31 pkt

Zadanie 1. Ciąg arytmetyczny (a_n) ma różnicę $r \neq 0$ i wszystkie wyrazy różne od zera. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ prawdziwa jest równość $\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{n}{a_1a_{n+1}}$.

___ / 4 pkt

Zadanie 2. Niech S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n). Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n prawdziwa jest równość $S_{4n} = 2(S_{3n} - S_n)$.

___ / 4 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Równania trudniejsze i parametr

KARTA 5/6

Równania ze wzorami na sumy, podstawienie $\sin x + \cos x = t$, równanie z parametrem, serie, które się pokrywają.

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 28 pkt

Zadanie 1. Rozwiąż równanie $\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$. Zapisz obliczenia. ___ / 4 pkt

Zadanie 2. Rozwiąż równanie $\cos 2x - 7\sin x = 4$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$. Zapisz obliczenia. ___ / 4 pkt

Zadanie 3. Rozwiąż równanie $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$. Zapisz obliczenia. ___ / 5 pkt

Zadanie 4. Dane jest równanie $2\sin^2 x - (m+2)\sin x + m = 0$ z parametrem m. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których to równanie ma w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ dokładnie trzy rozwiązania. Zapisz obliczenia. ___ / 5 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

PIERWSZA ŁAWKA · 40 ZADAŃ Z JEDNEGO TEMATU · PR · MATEMATYKA · MATURA 2027 · POZIOM ROZSZERZONY

Rachunek różniczkowy: granica funkcji, pochodna, styczna, monotoniczność i ekstrema – 40 zadań

Rachunek różniczkowy: granice funkcji (w tym jednostronne i w nieskończoności), ciągłość i własność Darboux, pochodna z reguł (także funkcji złożonej), styczna do wykresu, przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne, najmniejsza i największa wartość w przedziale, dowody nierówności pochodną oraz zadania z parametrem. 40 zadań otwartych w formule matury rozszerzonej 2027 (2–6 pkt, razem 151 pkt).

Karta	Temat	Zadania
1	**Ściąga: Rachunek różniczkowy: granica funkcji, pochodna, styczna, monotoniczność i ekstrema. Pierwsze kroki** krótkie zadania za 2 pkt: granice, pochodna funkcji złożonej, styczna pozioma, monotoniczność, prosty dowód	7 zad. 14 pkt
2	**Styczna, granica, ciągłość** zadania za 3 pkt: styczne, granica z parametrami, ciągłość, monotoniczność funkcji wymiernej, ekstrema	7 zad. 21 pkt
3	**Wartości, granice, definicja** zadania za 3–4 pkt: wartości w przedziale, granice jednostronne, definicja pochodnej, Darboux, styczna przez punkt	7 zad. 24 pkt
4	**Dowody i pochodna w kilku krokach** zadania za 4 pkt: dowody nierówności, parametry stycznej, wartości najmniejsza i największa, trzy rozwiązania	7 zad. 28 pkt
5	**Parametry i zastosowania** zadania za 5 pkt: ekstrema z parametrami, funkcja rosnąca, wspólna styczna, ciągłość i styczna, liczba rozwiązań równania	6 zad. 30 pkt
6	**Poziom końca arkusza** zadania za 5–6 pkt: zbiór wartości, dwie styczne z punktu, dowód z warunkiem, parametr i ekstrema, rodzina funkcji	6 zad. 34 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

Wzory z kontekstu

KARTA 2/6

zadania za 3 pkt: wykazanie wzoru pola, objętości, kosztu i odległości oraz badanie funkcji danej wzorem

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 20 pkt

Zadanie 1. Podstawą graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest trójkąt równoboczny o boku a. Objętość graniastosłupa jest równa 16. Wykaż, że pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa wyraża się wzorem $P(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + \frac{64\sqrt{3}}{a}$, gdzie $a > 0$.

___ / 3 pkt

Zadanie 2. Pojemnik w kształcie prostopadłościanu o podstawie kwadratowej o boku a (w metrach) ma objętość 36 m³ i nie ma pokrywy. Dno kosztuje 40 zł za 1 m², a ściany boczne 15 zł za 1 m². Wykaż, że koszt materiału (w zł) wyraża się wzorem $K(a) = 40a^2 + \frac{2160}{a}$, gdzie $a > 0$.

___ / 3 pkt

Zadanie 3. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 6 - 2\sqrt{x}$ dla $x \in \langle 0, 9\rangle$. Punkty $O = (0, 0)$, $A = (x, 0)$, $B = (x, f(x))$ i $C = (0, f(x))$, gdzie $0 < x < 9$, są wierzchołkami prostokąta. Wykaż, że pole tego prostokąta wyraża się wzorem $P(x) = 6x - 2x\sqrt{x}$.

___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

- **Wzorzec dowodu**: (1) oznaczenia i założenia (np. „trójkąt ostrokątny”), (2) plan (kąty / podobieństwo / trygonometria), (3) przekształcenia z uzasadnieniem każdego kroku, (4) zdanie „To należało wykazać”. **Sprawdzenie tezy dla kilku trójkątów lub liczb = 0 punktów.** Twierdzeń o dwusiecznej i o kącie między styczną a cięciwą nie wolno zakładać jako znanych – i nie są potrzebne.

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. (4 pkt, tw. cosinusów i sinusów) Boki trójkąta mają długości 9, 10 i 17. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt i promień okręgu opisanego na nim.

Etap I – kąt naprzeciw najdłuższego boku. $\cos\gamma = \frac{9^2 + 10^2 - 17^2}{2 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{-108}{180} = -\frac{3}{5}$,

$\sin\gamma = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$ ($\sin\gamma > 0$). ← 1 pkt

Etap II – pole i półobwód. $P = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5} = 36$, $p = \frac{9 + 10 + 17}{2} = 18$. ← 1 pkt

Etap III – promień okręgu wpisanego. $r = \frac{P}{p} = \frac{36}{18} = 2$. ← 1 pkt

Etap IV – promień okręgu opisanego. Z twierdzenia sinusów $2R = \frac{17}{\sin\gamma} = \frac{17 \cdot 5}{4}$, więc $R = \frac{85}{8}$. ← 1 pkt

Przykład 2. (3 pkt, dowód) W trójkącie *ABC* punkt *I* jest środkiem okręgu wpisanego. Wykaż, że $|\sphericalangle BIC| = 90° + \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC|$.

Etap I – założenia i oznaczenia. *I* leży na dwusiecznych kątów trójkąta. Niech α, β, γ będą miarami kątów *A*, *B*, *C*; $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Wtedy $|\sphericalangle IBC| = \frac{\beta}{2}$ i $|\sphericalangle ICB| = \frac{\gamma}{2}$. ← 1 pkt

Etap II – kąt w trójkącie *BIC*. $|\sphericalangle BIC| = 180° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 180° - \frac{\beta + \gamma}{2}$. ← 1 pkt

Etap III – wniosek. $\beta + \gamma = 180° - \alpha$, więc $|\sphericalangle BIC| = 180° - \frac{180° - \alpha}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2}$. To należało wykazać. ← 1 pkt

Uwaga: sprawdzenie dla jednego trójkąta (np. równobocznego) daje 0 pkt.

ZADANIA

Zadanie 1. W trójkącie *ABC* dane są: $|BC| = 5\sqrt{2}$, $|\sphericalangle BAC| = 45°$ oraz $|\sphericalangle ABC| = 60°$. Oblicz długość boku *AC*. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

PIERWSZA ŁAWKA

Zadania na 5 punktów

zadania za 5 pkt: styczne i pole, okrąg styczny do prostej, okręgi z parametrem, cięciwa danej długości, okręgi styczne do osi, dowód warunku styczności

KARTA **5/6**

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 30 pkt

Zadanie 1. Z punktu $P = (-2, -1)$ poprowadzono dwie styczne do okręgu o równaniu $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 20$. Punkty styczności oznaczono przez A i B. Wyznacz równania tych stycznych i oblicz pole trójkąta PAB. Zapisz obliczenia. ___ / 5 pkt

Zadanie 2. Prosta o równaniu $y = 2x - 3$ jest styczna do okręgu o w punkcie $T = (2, 1)$. Okrąg o przechodzi przez punkt $A = (11, 4)$. Wyznacz równanie okręgu o. Zapisz obliczenia. ___ / 5 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

PIERWSZA ŁAWKA · 40 ZADAŃ Z JEDNEGO TEMATU · PR · MATEMATYKA · MATURA 2027 · POZIOM ROZSZERZONY

Stereometria: kąty między ścianami, przekroje i bryły – 40 zadań

Stereometria na poziomie rozszerzonym: kąt między prostą a płaszczyzną, kąt dwuścienny i kąt między ścianami bocznymi ostrosłupa, twierdzenie o trzech prostopadłych, przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych, graniastosłupy, bryły obrotowe i kula, bryły podobne, objętości i pola oraz dowody stereometryczne („Wykaż, że…"). 40 zadań otwartych w formule matury rozszerzonej 2027 (2–6 pkt, razem 152 pkt).

Karta	Temat	Zadania
1	**Ściąga: Stereometria: kąty między ścianami, przekroje i bryły. Pierwsze kroki** krótkie zadania za 2 pkt: kąt przekątnej w graniastosłupie, walec, stożek o danym kącie rozwarcia, bryły podobne, kula i sześcian, prosty dowód, graniastosłup sześciokątny	7 zad. 14 pkt
2	**Jedna myśl, trzy kroki** zadania za 3 pkt: pole ostrosłupa z kątem ściany, twierdzenie o trzech prostopadłych, przekrój sześcianu, obrót trójkąta, kula i przekrój, dowód o polu całkowitym	7 zad. 21 pkt
3	**Kąty i przekroje** zadania za 3–4 pkt: kąt przekątnej ściany i płaszczyzny, krawędź a podstawa, kula wpisana w stożek, dowód o kącie dwuściennym, przekrój ostrosłupa, trójkąt w graniastosłupie, stożek ścięty	7 zad. 25 pkt
4	**Cztery kroki** zadania za 4 pkt: kąt między ścianami bocznymi (dwa warianty), przekrój sześcianu, stożek w kuli, ostrosłup sześciokątny, dowód z krawędziami parami prostopadłymi, kula wpisana w ostrosłup	7 zad. 28 pkt
5	**Zadania na 5 punktów** zadania za 5 pkt: kąt rozwarty między ścianami a objętość, ostrosłup na prostokącie, dowód zależności kątów, przekrój ostrosłupa trójkątnego, walec w stożku (dwa przypadki), trójkąt w graniastosłupie	6 zad. 30 pkt
6	**Poziom końca arkusza** zadania za 5–6 pkt: walec w ostrosłupie, kula opisana (dwa przypadki), przekrój sześcianu (pięciokąt), przekrój nachylony, płaszczyzna prostopadła do krawędzi, przekrój równoległy do dwóch krawędzi (dowód)	6 zad. 34 pkt

PIERWSZA ŁAWKA · 40 ZADAŃ Z JEDNEGO TEMATU · PR · MATEMATYKA · MATURA 2027 · POZIOM ROZSZERZONY

Kombinatoryka i prawdopodobieństwo: warunkowe, całkowite, Bayes, Bernoulli – 40 zadań

Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa na poziomie rozszerzonym: reguły mnożenia i dodawania, permutacje, wariacje i kombinacje, symbol Newtona i dwumian Newtona, zliczanie z warunkami, prawdopodobieństwo klasyczne i warunkowe, twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym i wzór Bayesa, schemat Bernoulliego oraz dowody tożsamości z symbolem Newtona („Wykaż, że…"). 40 zadań otwartych w formule matury rozszerzonej 2027 (2–6 pkt, razem 149 pkt).

Karta	Temat	Zadania
1	**Ściąga: Kombinatoryka i prawdopodobieństwo: warunkowe, całkowite, Bayes, Bernoulli. Pierwsze kroki** krótkie zadania za 2 pkt: reguła mnożenia, równanie z symbolem Newtona, współczynnik w dwumianie, prawdopodobieństwo warunkowe, schemat Bernoulliego, prosta tożsamość, wariacje	7 zad. 14 pkt
2	**Jedna myśl, trzy kroki** zadania za 3 pkt: cyfry z warunkami, wybór z podziałem na klasy, zdarzenie przeciwne, warunkowe z wzoru, prawdopodobieństwo całkowite, Bayes, Bernoulli „co najmniej"	7 zad. 21 pkt
3	**Dowody i dwa warunki** zadania za 3–4 pkt: dowód tożsamości, wyraz stały, usadzanie z zakazem, warunkowe w talii, dowód nierówności dla prawdopodobieństwa, trzy hipotezy, Bayes	7 zad. 23 pkt
4	**Cztery kroki** zadania za 4 pkt: liczby z warunkami, dowód z dwiema zmiennymi, równanie z parametrem p, dwumian z symbolem Newtona, warunkowe w losowaniu trójek, Bayes z dwoma rzutami, mecz do 2 albo do 3 setów	7 zad. 28 pkt
5	**Zadania na 5 punktów** zadania za 5 pkt: ciągi z zakazem sąsiedztwa, Bayes po przełożeniu kuli, Bernoulli z warunkiem, podzielność przez 4, podziały na zespoły, trójkąty w wielokącie foremnym	6 zad. 30 pkt
6	**Poziom końca arkusza** zadania za 5–6 pkt: nierówność z symbolem Newtona, równanie z prawdopodobieństwami Bernoulliego, stosunek współczynników, dowód o parzystej liczbie sukcesów, Bayes ze strzelcami, drogi w siatce	6 zad. 33 pkt

Zadanie 2. Dane jest równanie $(k-3)x^2+4x-5=0$ z parametrem k. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których to równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste. Zapisz obliczenia.

___ / 2 pkt

Zadanie 3. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej p równanie $x^2-3px+2p^2-1=0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste.

___ / 2 pkt

Zadanie 4. Dane jest równanie $(a+2)x^2-6x+3=0$ z parametrem a. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których to równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste. Zapisz obliczenia.

___ / 2 pkt

Zadanie 5. Dla pewnych wartości parametru p wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji $f(x)=x^2-2px+5p-6$ leży na osi Ox. Wyznacz wszystkie takie wartości p. Zapisz obliczenia.

___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. Liczby $x + 1$, $2x - 1$, $3x + 1$ tworzą – w podanej kolejności – ciąg geometryczny. Wyznacz x i iloraz tego ciągu. Rozważ wszystkie przypadki.

Warunek ciągu geometrycznego: $(2x - 1)^2 = (x + 1)(3x + 1)$, czyli $4x^2 - 4x + 1 = 3x^2 + 4x + 1$, stąd $x^2 - 8x = 0$, $x = 0$ albo $x = 8$.

$x = 0$: ciąg 1, −1, 1, $q = -1$. $x = 8$: ciąg 9, 15, 25, $q = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$. W obu przypadkach wyrazy są różne od zera.

Odpowiedź: $x = 0$, $q = -1$ albo $x = 8$, $q = \frac{5}{3}$.

Przykład 2. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^2 + 7}$.

Licznik to suma n wyrazów ciągu arytmetycznego ($a_1 = 1$, $r = 1$): $\frac{1 + n}{2} \cdot n = \frac{n^2 + n}{2}$.

$\frac{n^2 + n}{2(n^2 + 7)} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2(1 + \frac{7}{n^2})}$, a $\frac{1}{n} \to 0$ i $\frac{7}{n^2} \to 0$, więc granica jest równa $\frac{1}{2}$.

ZADANIA

Zadanie 1. W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, $a_4 = 11$ oraz $a_9 = -4$. Oblicz a_{25}. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 2. W ciągu geometrycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, $a_3 = 20$ oraz $a_6 = -2500$. Oblicz a_1. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 3. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^3 - 5n}{2n^3 + 7n^2 + 1}$. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

PIERWSZA ŁAWKA

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Matura 2027 matematyka PR – 400 zadań: 10 tematów po 40 zadań z kluczem i zasadami oceniania (pakiet)

Podgląd pokazał 12 z 434 stron. Pełna wersja: 434 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Matura 2027 matematyka PR – Ciągi, granice ciągów i szereg geometryczny – 40 zadań z kluczem i zasadami oceniania
- Matura 2027 matematyka PR – Geometria analityczna: okręgi, styczne, wektory – 40 zadań z kluczem i zasadami oceniania
- Matura 2027 matematyka PR – Kombinatoryka i prawdopodobieństwo: warunkowe, całkowite, Bayes, Bernoulli – 40 zadań z kluczem i zasadami oceniania
- Matura 2027 matematyka PR – Optymalizacja z pochodną i „wykaż wzór funkcji” – 40 zadań z kluczem i zasadami oceniania
- Matura 2027 matematyka PR – Równania i nierówności z parametrem – 40 zadań z kluczem i zasadami oceniania
- Matura 2027 matematyka PR – Planimetria: obliczenia i dowody geometryczne – 40 zadań z kluczem i zasadami oceniania
- Matura 2027 matematyka PR – Rachunek różniczkowy: granica funkcji, pochodna, styczna, monotoniczność i ekstrema – 40 zadań z kluczem i zasadami…
- Matura 2027 matematyka PR – Stereometria: kąty między ścianami, przekroje i bryły – 40 zadań z kluczem i zasadami oceniania
- Matura 2027 matematyka PR – Trygonometria: tożsamości, funkcje i równania trygonometryczne – 40 zadań z kluczem i zasadami oceniania
- Matura 2027 matematyka PR – Wartość bezwzględna, wielomiany i wyrażenia wymierne – 40 zadań z kluczem i zasadami oceniania

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matura-2027-matematyka-rozszerzona-40-zadan-pakiet-10-tematow