PIERWSZA ŁAWKA · 40 ZADAŃ Z JEDNEGO TEMATU · PR · MATEMATYKA · MATURA 2027 · POZIOM ROZSZERZONY

Ciągi, granice ciągów i szereg geometryczny – 40 zadań

Ciąg arytmetyczny i geometryczny w zadaniach rozszerzonych, monotoniczność i rekurencja, granice ciągów (także z twierdzeniem o trzech ciągach), szereg geometryczny z parametrem i procent składany. 40 zadań otwartych w formule matury rozszerzonej 2027 (2–6 pkt, razem 149 pkt).

Karta	Temat	Zadania
1	**Ściąga: Ciągi, granice ciągów i szereg geometryczny. Krótkie rachunki** Zadania za 2 pkt: wyraz i suma ciągu, granica, szereg, monotoniczność, rekurencja, procent składany.	7 zad. 14 pkt
2	**Warunki i definicje** Zadania za 3 pkt: trzy liczby w ciągu, granica z pierwiastkiem, szereg z niewiadomą, pierwszy dowód.	7 zad. 21 pkt
3	**Dwa kroki** Zadania za 3–4 pkt: monotoniczność kwadratowa, od sumy do wyrazu, regularne wpłaty, szereg w kontekście, suma teleskopowa.	6 zad. 21 pkt
4	**Układ warunków** Zadania za 4 pkt: kilka warunków na ciąg, równanie z szeregiem, rata, rekurencja do ciągu geometrycznego.	6 zad. 24 pkt
5	**Dowody i parametry** Zadania za 4–5 pkt: dowody o ciągach, szereg i granica z parametrem, figury i szereg.	7 zad. 31 pkt
6	**Na poziomie górnej granicy matury** Zadania za 5–6 pkt: wieloetapowe warunki, dwukwadratowe i ciąg arytmetyczny, trzy ciągi, szereg z wartością bezwzględną.	7 zad. 38 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Klucz na końcu: odpowiedzi, zasady oceniania etapami jak w CKE, pełne rozwiązania.

Zadania oryginalne. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: VI.1–VI.7, VI.R1–VI.R2 (+ I.8, III.R2, III.R4, III.R6). Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

Ściąga: Ciągi, granice ciągów i szereg geometryczny. Krótkie rachunki

Zadania za 2 pkt: wyraz i suma ciągu, granica, szereg, monotoniczność, rekurencja, procent składany.

KARTA 1/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 14 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Ciąg arytmetyczny** (jest w karcie wzorów): $a_n = a_1 + (n-1)r$, $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$. Trzy liczby a, b, c tworzą (w tej kolejności) ciąg arytmetyczny $\Leftrightarrow 2b = a + c$.
- **Ciąg geometryczny** (jest w karcie wzorów): $a_n = a_1 q^{n-1}$, $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ dla $q \neq 1$. Trzy liczby niezerowe a, b, c tworzą (w tej kolejności) ciąg geometryczny $\Leftrightarrow b^2 = ac$.
- **Monotoniczność ciągu** (trzeba pamiętać): bada się znak różnicy $a_{n+1} - a_n$ (dla $n \geq 1$): dodatnia – rosnący, ujemna – malejący; dla ciągu o wyrazach dodatnich można porównać iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ z 1. Różnica może zmieniać znak – wtedy ciąg nie jest monotoniczny.
- **Rekurencja**: wyrazy liczy się po kolei ze wzoru $a_{n+1} = f(a_n)$ albo $a_{n+2} = f(a_n, a_{n+1})$ i z podanych a_1 (i a_2). Wzór ogólny często daje podstawienie $b_n = a_n - c$, które prowadzi do ciągu geometrycznego.
- **Granice ciągów** (w karcie wzorów są twierdzenia o granicach sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu): $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ dla $k > 0$, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ dla $|q| < 1$. Iloraz wielomianów – dzielimy licznik i mianownik przez najwyższą potęgę n z mianownika; różnica pierwiastków – mnożymy i dzielimy przez sumę (sprzężenie).
- **Twierdzenie o trzech ciągach** (jest w karcie wzorów): jeśli $a_n \leq b_n \leq c_n$ od pewnego miejsca oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$, to $\lim_{n\to\infty} b_n = g$. Sumy z n składnikami szacujemy przez najmniejszy i największy składnik razy n.
- **Szereg geometryczny** (jest w karcie wzorów): $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots$ jest zbieżny $\Leftrightarrow |q| < 1$ (dla $a_1 \neq 0$), wtedy $S = \frac{a_1}{1-q}$. Zawsze zapisz warunek $|q| < 1$ i sprawdź go dla znalezionych wartości parametru. Figury podobne w skali k: obwody mają iloraz k, pola k^2.
- **Procent składany** (trzeba pamiętać): kapitał K, stopa p% za okres kapitalizacji, n okresów: $K(1 + \frac{p}{100})^n$. Stopę podaną „w skali roku” przy kapitalizacji co pół roku dzielimy na dwa okresy. Regularne wpłaty to suma ciągu geometrycznego.
- **Zapis:** nazwij niewiadome z dziedziną („r – różnica, $r \neq 0$”, „q – iloraz, $|q| < 1$”), zapisz układ równań, rozwiąż, odrzuć rozwiązania sprzeczne z treścią i odpowiedz na pytanie zadania. W dowodzie: dla dowolnego n (nie dla kilku wartości); $a_n = S_n - S_{n-1}$ tylko dla $n \geq 2$ – sprawdź osobno $n = 1$.

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. Liczby $x + 1$, $2x - 1$, $3x + 1$ tworzą – w podanej kolejności – ciąg geometryczny. Wyznacz x i iloraz tego ciągu. Rozważ wszystkie przypadki.

Warunek ciągu geometrycznego: $(2x - 1)^2 = (x + 1)(3x + 1)$, czyli $4x^2 - 4x + 1 = 3x^2 + 4x + 1$, stąd $x^2 - 8x = 0$, $x = 0$ albo $x = 8$.

$x = 0$: ciąg 1, −1, 1, $q = -1$. $x = 8$: ciąg 9, 15, 25, $q = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$. W obu przypadkach wyrazy są różne od zera.

Odpowiedź: $x = 0$, $q = -1$ albo $x = 8$, $q = \frac{5}{3}$.

Przykład 2. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^2 + 7}$.

Licznik to suma n wyrazów ciągu arytmetycznego ($a_1 = 1$, $r = 1$): $\frac{1 + n}{2} \cdot n = \frac{n^2 + n}{2}$.

$\frac{n^2 + n}{2(n^2 + 7)} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2(1 + \frac{7}{n^2})}$, a $\frac{1}{n} \to 0$ i $\frac{7}{n^2} \to 0$, więc granica jest równa $\frac{1}{2}$.

ZADANIA

Zadanie 1. W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, $a_4 = 11$ oraz $a_9 = -4$. Oblicz a_{25}. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 2. W ciągu geometrycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, $a_3 = 20$ oraz $a_6 = -2500$. Oblicz a_1. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 3. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^3 - 5n}{2n^3 + 7n^2 + 1}$. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

PIERWSZA ŁAWKA

Warunki i definicje

KARTA 2/6

Zadania za 3 pkt: trzy liczby w ciągu, granica z pierwiastkiem, szereg z niewiadomą, pierwszy dowód.

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 21 pkt

Zadanie 1. Trzy liczby tworzą rosnący ciąg arytmetyczny. Suma tych liczb jest równa 27, a ich iloczyn jest równy 693. Wyznacz te liczby. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 2. Trzy liczby tworzą – w podanej kolejności – ciąg geometryczny. Suma tych liczb jest równa 42, a ich iloczyn jest równy 1728. Wyznacz te liczby. Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 3. Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2+4n}-3n\right)$**. Zapisz obliczenia.** ___ / 3 pkt

PIERWSZA ŁAWKA

Dwa kroki

Zadania za 3–4 pkt: monotoniczność kwadratowa, od sumy do wyrazu, regularne wpłaty, szereg w kontekście, suma teleskopowa.

KARTA 3/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 21 pkt

Zadanie 1. Dany jest ciąg (a_n) określony dla $n \geq 1$ wzorem $a_n = n^2 - 12n + 5$. Zbadaj monotoniczność tego ciągu i oblicz jego najmniejszy wyraz. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 2. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n + 3^{n+1}}{3^n - 2^{n+2}}$. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 3. Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ równa $S_n = 3n^2 - n$. Wyznacz wzór ogólny ciągu (a_n) i najmniejszą liczbę n, dla której $a_n > 200$. Zapisz obliczenia. ___ / 4 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Układ warunków

KARTA **4/6**

Zadania za 4 pkt: kilka warunków na ciąg, równanie z szeregiem, rata, rekurencja do ciągu geometrycznego.

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 24 pkt

Zadanie 1. Liczby $x - 5$, $x - 2$, $2x + 4$ tworzą – w podanej kolejności – ciąg geometryczny. Wyznacz wszystkie wartości x i dla każdej z nich podaj iloraz tego ciągu. Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia. ___ / 4 pkt

Zadanie 2. Suma pięciu początkowych wyrazów rosnącego ciągu arytmetycznego (a_n) jest równa 40, a suma kwadratów tych wyrazów jest równa 330. Oblicz sumę trzydziestu początkowych wyrazów tego ciągu. Zapisz obliczenia. ___ / 4 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Dowody i parametry

Zadania za 4–5 pkt: dowody o ciągach, szereg i granica z parametrem, figury i szereg.

KARTA **5/6**

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 31 pkt

Zadanie 1. Ciąg arytmetyczny (a_n) ma różnicę $r \neq 0$ i wszystkie wyrazy różne od zera. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ prawdziwa jest równość $\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{n}{a_1a_{n+1}}$.

___ / 4 pkt

Zadanie 2. Niech S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n). Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n prawdziwa jest równość $S_{4n} = 2(S_{3n} - S_n)$.

___ / 4 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 6. Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{(p^2 - 9)n^2 + 3n}{(p - 3)^2 n + 5}$, gdzie $n \geq 1$ i p jest parametrem. Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których ciąg (a_n) jest zbieżny, i dla każdej z nich oblicz granicę tego ciągu. Zapisz obliczenia.

___ / 5 pkt

Zadanie 7. W trójkącie równobocznym T_1 o boku 18 narysowano koło k_1 wpisane w ten trójkąt. W koło k_1 wpisano trójkąt równoboczny T_2, w trójkąt T_2 wpisano koło k_2, w to koło wpisano trójkąt równoboczny T_3 itd. Postępowanie to kontynuujemy bez końca. Oblicz sumę pól wszystkich części trójkątów T_n leżących poza kołami k_n (czyli sumę pól różnic $T_n \setminus k_n$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$). Zapisz obliczenia.

___ / 5 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Na poziomie górnej granicy matury

Zadania za 5–6 pkt: wieloetapowe warunki, dwukwadratowe i ciąg arytmetyczny, trzy ciągi, szereg z wartością bezwzględną.

KARTA **6/6**

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 38 pkt

Zadanie 1. Ciąg geometryczny (a_n), określony dla $n \geq 1$, ma pierwszy wyraz $a_1 = 3$. Liczby a_1, $a_2 + 24$, a_3 tworzą – w podanej kolejności – rosnący ciąg arytmetyczny. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu arytmetycznego. Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia.

___ / 5 pkt

Zadanie 2. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n). Rozważamy jego dwadzieścia początkowych wyrazów. Suma wyrazów o numerach nieparzystych $(a_1 + a_3 + \ldots + a_{19})$ jest równa 180. Suma wyrazów o numerach parzystych $(a_2 + a_4 + \ldots + a_{20})$ jest równa 210. Oblicz sumę tych spośród dwudziestu początkowych wyrazów, które są dodatnie. Zapisz obliczenia.

___ / 5 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 3. Zbieżny ciąg geometryczny (a_n), określony dla $n \geq 1$, ma następujące własności. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 6, a suma kwadratów wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 12. Wyznacz a_1 i iloraz q tego ciągu. Zapisz obliczenia. ___ / 5 pkt

Zadanie 4. Dla pewnych wartości parametru m równanie $x^4 - 20x^2 + m = 0$ ma cztery różne rozwiązania rzeczywiste, które po uporządkowaniu rosnąco tworzą ciąg arytmetyczny. Wyznacz wszystkie takie wartości m. Zapisz obliczenia. ___ / 6 pkt

Zadanie 5. Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ niech $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}}$, a S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n). Wykaż, że $S_n = \frac{\sqrt{2n+1} - 1}{2}$, a następnie wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą n, dla której $S_n > 6$. ___ / 6 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Matura 2027 matematyka PR – Ciągi, granice ciągów i szereg geometryczny – 40 zadań z kluczem i zasadami oceniania

Podgląd pokazał 10 z 40 stron. Pełna wersja: 40 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- 40 nowych zadań otwartych z matematyki na maturę rozszerzoną 2027 z jednego tematu: ciągi, granice ciągów i szereg geometryczny – Ciąg arytmetyczny i geometryczny w zadaniach rozsz
- Na początku ściąga: najważniejsze wzory i twierdzenia z tematu (z zaznaczeniem, co jest w karcie wzorów CKE) i wzorcowe rozwiązanie zapisane tak, jak oczekują egzaminatorzy.
- Zadania w sześciu sekcjach – od krótkich za 2–3 pkt do wieloetapowych za 5–6 pkt (razem 149 pkt), w tym zadania „Wykaż, że…”.
- Polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE 2025–2026.
- Na końcu klucz: odpowiedzi, zasady oceniania etapami (za co kolejne punkty, uwagi w stylu CKE) i przykładowe pełne rozwiązania.
- 40 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.
- Wszystkie zadania są oryginalne – nie powtarzają zadań CKE ani naszych arkuszy próbnych, zestawów i „najczęstszych zadań maturalnych”.
- Wymagania: VI.1–VI.7, VI.R1–VI.R2 (+ I.8, III.R2, III.R4, III.R6).
- Materiał przygotowany zgodnie z podstawą programową matematyki dla liceum i technikum (Dz.U.
- 2018 poz.
- 467 w brzmieniu Dz.U.
- 2024 poz.
- 1019), zakres rozszerzony – obowiązującą na maturze w latach 2027–2030.

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matura-2027-matematyka-rozszerzona-ciagi-granice-szereg-geometryczny-40-zadan