PIERWSZA ŁAWKA · ZESTAW DZIAŁOWY · MATEMATYKA · KLASA 3 LO I TECHNIKUM · ZAKRES PODSTAWOWY

Dział 2. Geometria analityczna

Długość i środek odcinka, drugi koniec odcinka, równania prostych (kierunkowe i ogólne), równoległość i punkt wspólny prostych, równanie okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ – odczyt środka i promienia, okrąg o danej średnicy, położenie punktu względem okręgu, obrazy punktów, wielokątów i okręgów w symetriach względem osi układu i początku układu współrzędnych. Dziewięć kart: teoria z przykładami, ćwiczenia, zadania typu maturalnego, dwie kartkówki (A i B) i sprawdzian (A i B) – z kluczem i zasadami oceniania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Geometria analityczna – najważniejsze wiadomości** Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka	3 zad. 8 pkt
2	**Geometria analityczna – ćwiczenia** Ćwiczę umiejętności z działu	8 zad. 26 pkt
3	**Geometria analityczna – zadania typu maturalnego** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	8 zad. 14 pkt
4	**Kartkówka 1: odcinki i symetrie w układzie współrzędnych – grupa A** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
5	**Kartkówka 1: odcinki i symetrie w układzie współrzędnych – grupa B** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
6	**Kartkówka 2: równanie okręgu – grupa A** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
7	**Kartkówka 2: równanie okręgu – grupa B** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
8	**Sprawdzian: Geometria analityczna – grupa A** 45 minut · 20 pkt	10 zad. 20 pkt
9	**Sprawdzian: Geometria analityczna – grupa B** 45 minut · 20 pkt	10 zad. 20 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 przypomina najważniejsze wiadomości z działu i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku – od niej warto zacząć.

- Karta 2 to ćwiczenia, a karta 3 – zadania w formule matury 2027 (polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE).
- Karty 4–7 to dwie kartkówki (po 15 minut), każda w grupach A i B. Karty 8–9 to sprawdzian (45 minut) w grupach A i B – te same typy zadań i ta sama punktacja, inne liczby.
- Klucz na końcu zestawu zawiera odpowiedzi, przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE (kamienie milowe, błąd rachunkowy = −1 pkt).
- Osobny plik „Powtórka” zbiera definicje, wzory (z zaznaczeniem, które są w karcie wzorów CKE), typowe błędy i test „Sprawdź się”.

Materiał oryginalny. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: IX.1–IX.5 (w tle VIII.2, VIII.4, VIII.10, VIII.11); cele ogólne III.1, IV.3, IV.4. Miejsce w seriach podręczników: NE kl. 3 · Pazdro kl. 2–3 · GWO kl. 4 · technikum NE kl. 4. Nazwy wydawnictw i serii podano tylko informacyjnie – materiał nie jest z nimi powiązany. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

Geometria analityczna – najważniejsze wiadomości

Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka

KARTA 1/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Długość odcinka** o końcach $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$: $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ – to twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych równoległych do osi układu. Kolejność punktów nie ma znaczenia (różnice podnosimy do kwadratu).
- **Środek odcinka** AB: $S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$. Gdy znamy środek S i koniec A, drugi koniec to $B = (2x_S - x_A, 2y_S - y_A)$.
- **Proste** (przypomnienie z klasy 1): równanie kierunkowe $y = ax + b$, równanie ogólne $Ax + By + C = 0$; prosta przez punkty A i B ma współczynnik kierunkowy $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ (gdy $x_A \neq x_B$). Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są równoległe, gdy $a_1 = a_2$. Gdy $a_1 \neq a_2$, proste przecinają się w jednym punkcie – jego współrzędne to rozwiązanie układu równań obu prostych.
- **Równanie okręgu** o środku $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Uwaga na znaki: w równaniu $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$ środek to $(-3, 1)$, a promień $r = 4$ (po prawej stronie jest kwadrat promienia). Okrąg o środku w początku układu ma równanie $x^2 + y^2 = r^2$.
- **Położenie punktu względem okręgu.** Punkt P leży na okręgu, gdy $|SP| = r$; wewnątrz koła, gdy odległość $|SP|$ jest mniejsza od r; na zewnątrz, gdy jest większa od r. W praktyce podstawiamy współrzędne punktu do lewej strony równania okręgu i porównujemy wynik z r^2.
- **Jak ułożyć równanie okręgu:** potrzebny jest środek i promień. Okrąg o środku S przechodzący przez punkt P: $r = |SP|$. Okrąg o średnicy AB: środkiem jest środek odcinka AB, a $r = \frac{1}{2}|AB|$ – nie myl średnicy z promieniem.

Przekształcenie	Obraz punktu (x, y)	Obraz okręgu o środku (a, b) i promieniu r
symetria względem osi Ox	$(x, -y)$	środek $(a, -b)$, promień r
symetria względem osi Oy	$(-x, y)$	środek $(-a, b)$, promień r
symetria względem punktu $(0, 0)$	$(-x, -y)$	środek $(-a, -b)$, promień r

- **Obrazy figur.** Obraz wielokąta w symetrii wyznaczamy, przekształcając jego wierzchołki (obraz ma te same długości boków i to samo pole). Obraz okręgu: przekształcamy środek, promień się nie zmienia.

- W „Wybranych wzorach matematycznych” CKE są: długość i środek odcinka, równania prostej, warunek równoległości, równanie okręgu (postać kanoniczna) oraz symetrie. Są tam też wzory potrzebne tylko w zakresie rozszerzonym (prostopadłość prostych, wektory). Prostopadłość i styczne w układzie współrzędnych oraz punkty wspólne prostej i okręgu to zakres rozszerzony.

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. Dane są punkty $A = (-3, 1)$ i $B = (5, -5)$. Oblicz długość odcinka AB i współrzędne jego środka.

$|AB| = \sqrt{(5 - (-3))^2 + (-5 - 1)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10.$

$S = \left(\frac{-3 + 5}{2}, \frac{1 + (-5)}{2}\right) = (1, -2).$

Przykład 2. Punkt $S = (2, -1)$ jest środkiem odcinka AB, gdzie $A = (-4, 3)$. Wyznacz współrzędne punktu $B = (x, y)$.

$\frac{-4 + x}{2} = 2$, więc $x = 8$; $\frac{3 + y}{2} = -1$, więc $y = -5$. Zatem $B = (8, -5)$.

Szybciej: $B = (2 \cdot 2 - (-4), 2 \cdot (-1) - 3) = (8, -5)$.

Przykład 3. Okrąg o ma równanie $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$. Podaj środek i promień okręgu. Zbadaj położenie punktów $P = (1, 7)$ i $O = (0, 0)$ względem okręgu o.

$S = (-2, 3)$, $r = 5$.

P: $(1 + 2)^2 + (7 - 3)^2 = 9 + 16 = 25 = r^2$ – punkt P leży na okręgu.

O: $(0 + 2)^2 + (0 - 3)^2 = 4 + 9 = 13 < 25$ – punkt O leży wewnątrz okręgu.

Przykład 4. Wyznacz równanie okręgu o średnicy AB, gdzie $A = (-1, 2)$ i $B = (5, 10)$.

Środek okręgu to środek odcinka AB: $S = \left(\frac{-1 + 5}{2}, \frac{2 + 10}{2}\right) = (2, 6)$.

$|AB| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$, więc promień $r = 5$ (połowa średnicy).

Równanie: $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 25$.

Przykład 5. Trójkąt ABC ma wierzchołki $A = (1, 2)$, $B = (4, 1)$, $C = (2, 5)$. Wyznacz wierzchołki obrazów tego trójkąta w symetrii względem osi Ox, osi Oy i początku układu współrzędnych. Wyznacz obraz okręgu $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$ w symetrii względem osi Oy.

Oś Ox: $(1, -2)$, $(4, -1)$, $(2, -5)$. Oś Oy: $(-1, 2)$, $(-4, 1)$, $(-2, 5)$. Punkt $(0, 0)$: $(-1, -2)$, $(-4, -1)$, $(-2, -5)$.

Okrąg ma środek $(3, -1)$ i promień 2. Obraz środka w symetrii względem osi Oy: $(-3, -1)$.

Obraz okręgu: $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$.

Przykład 6. Wyznacz równanie prostej równoległej do prostej $2x - y + 3 = 0$, przechodzącej przez środek odcinka KL, gdzie $K = (-3, 4)$ i $L = (5, 2)$.

Środek odcinka: $S = \left(\frac{-3 + 5}{2}, \frac{4 + 2}{2}\right) = (1, 3)$.

Dana prosta: $y = 2x + 3$ – współczynnik kierunkowy 2. Prosta równoległa: $y = 2x + b$; przez S: $3 = 2 \cdot 1 + b$, $b = 1$.

Odpowiedź: $y = 2x + 1$ (postać ogólna: $2x - y + 1 = 0$).

ZADANIA

Zadanie 1. Dane są punkty $A = (2, -1)$ i $B = (-4, 7)$. Uzupełnij. ___ / 4 pkt

1. $|AB| =$ _____
2. Środek odcinka AB: _____
3. Obraz punktu A w symetrii względem osi Ox: _____
4. Obraz punktu B w symetrii względem początku układu współrzędnych: _____

Zadanie 2. Okrąg o równaniu $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$ ma środek S i promień r, gdzie ___ / 1 pkt

A. $S = (4, -1)$, $r = 3$

B. $S = (-4, 1)$, $r = 3$

C. $S = (4, -1)$, $r = 9$

D. $S = (-4, 1)$, $r = 9$

Zadanie 3. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 3 pkt

1. Proste $y = 2x + 1$ i $4x - 2y + 5 = 0$ są równoległe.	**P**	**F**
2. Punkt $(0, 5)$ leży na okręgu $x^2 + y^2 = 25$.	**P**	**F**
3. Obrazem punktu $(3, -2)$ w symetrii względem osi Oy jest punkt $(-3, 2)$.	**P**	**F**

PIERWSZA ŁAWKA

Geometria analityczna – ćwiczenia

KARTA 2/9

Ćwiczę umiejętności z działu

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 26 pkt

Zadanie 1. Oblicz długości odcinków i współrzędne ich środków. ___ / 5 pkt

1. $|KL|$, gdzie $K = (1, 1)$, $L = (4, 5)$: _____
2. $|MN|$, gdzie $M = (-2, 3)$, $N = (4, -1)$: _____
3. środek odcinka MN: _____
4. $|PR|$, gdzie $P = (0, -3)$, $R = (6, -3)$: _____
5. środek odcinka PR: _____

Zadanie 2. Dopasuj do każdego równania okręgu (1–4) jego środek i promień (a–d). ___ / 4 pkt

1. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$
2. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$
3. $x^2 + (y + 2)^2 = 16$
4. $(x - 1)^2 + y^2 = 2$

a) $S = (0, -2)$, $r = 4$

b) $S = (1, 0)$, $r = \sqrt{2}$

c) $S = (1, -2)$, $r = 4$

d) $S = (-1, 2)$, $r = 2$

1 ____ 2 ____ 3 ____ 4 ____

Zadanie 3. Punkty $A = (m, 3)$ i $B = (4, -1)$ są odległe o 5. Wyznacz wszystkie możliwe wartości liczby m. ___ / 2 pkt

Zadanie 4. Okrąg o środku $S = (-1, 4)$ przechodzi przez punkt $P = (2, 0)$. a) Oblicz promień i zapisz równanie okręgu. b) Sprawdź, czy punkty $Q = (3, 7)$ i $R = (-5, 0)$ leżą na tym okręgu. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 5. Czworokąt *ABCD* ma wierzchołki $A = (1, 1)$, $B = (5, 2)$, $C = (4, 5)$, $D = (0, 4)$. a) Wyznacz wierzchołki obrazu czworokąta w symetrii względem osi *Ox*. b) Wyznacz wierzchołki obrazu czworokąta w symetrii względem początku układu współrzędnych. c) Zapisz równania obrazów okręgu $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 10$ w symetrii względem osi *Ox* i w symetrii względem początku układu współrzędnych.

___ / 3 pkt

Zadanie 6. Trójkąt *ABC* ma wierzchołki $A = (-2, -1)$, $B = (4, -1)$, $C = (1, 3)$. Oblicz obwód i pole tego trójkąta. Uzasadnij, że trójkąt jest równoramienny.

___ / 3 pkt

Zadanie 7. Punkty $A = (-3, -2)$, $B = (3, 0)$ i $C = (5, 4)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku *ABCD*. Wyznacz współrzędne wierzchołka *D* i równanie prostej *CD* w postaci kierunkowej.

___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Geometria analityczna – zadania typu maturalnego

KARTA 3/9

Polecenia i punktacja jak na maturze 2027

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 14 pkt

Zadanie 1. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są punkty $A = (-3, 4)$ oraz $B = (2, -8)$.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Długość odcinka AB jest równa

___ / 1 pkt

A. $\sqrt{17}$ **B.** 13 **C.** 17 **D.** $\sqrt{119}$

Zadanie 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Okrąg o równaniu $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 20$ ma środek S i promień r, gdzie

___ / 1 pkt

A. $S = (-5, 2)$, $r = 20$ **B.** $S = (5, -2)$, $r = 2\sqrt{5}$
C. $S = (-5, 2)$, $r = 2\sqrt{5}$ **D.** $S = (5, -2)$, $r = 10$

Zadanie 3. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) odcinek AB, gdzie $A = (-1, -3)$ i $B = (7, 3)$, jest średnicą okręgu.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Okrąg ten jest określony równaniem

___ / 1 pkt

A. $(x - 3)^2 + y^2 = 100$ **B.** $(x + 3)^2 + y^2 = 25$
C. $(x - 3)^2 + y^2 = 5$ **D.** $(x - 3)^2 + y^2 = 25$

Zadanie 4. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są punkt $P = (-3, 7)$ oraz okrąg o o równaniu $(x - 1)^2 + (y + 6)^2 = 9$.
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

___ / 1 pkt

1. Obrazem punktu P w symetrii względem osi Oy jest punkt $(3, 7)$.	**P**	**F**
2. Obrazem okręgu o w symetrii względem osi Ox jest okrąg o równaniu $(x + 1)^2 + (y + 6)^2 = 9$.	**P**	**F**

Zadanie 5. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkt $S = (3, 1)$ jest środkiem odcinka AB, gdzie $A = (-1, -2)$.
Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

___ / 2 pkt

1. Punkt B ma współrzędne _____ .
2. Długość odcinka AB jest równa _____ .

Podgląd • Pierwsza Ławka

Kartkówka 1: odcinki i symetrie w układzie współrzędnych – grupa A

15 minut · 8 pkt

KARTA 4/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

Zadanie 1. Dane są punkty $P = (-1, -4)$ i $Q = (7, 2)$. Uzupełnij. ___ / 2 pkt

1. $|PQ| =$ _____
2. Środek odcinka PQ ma współrzędne _____

Zadanie 2. Obrazem punktu $K = (4, -7)$ w symetrii względem początku układu współrzędnych jest punkt ___ / 1 pkt

A. $(-4, -7)$ **B.** $(-4, 7)$ **C.** $(4, 7)$ **D.** $(-7, 4)$

Zadanie 3. Punkt $S = (-2, 4)$ jest środkiem odcinka AB, gdzie $A = (1, 8)$. Wyznacz współrzędne punktu B i oblicz długość odcinka AB. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 4. Trójkąt KLM ma wierzchołki $K = (-3, 1)$, $L = (2, 1)$, $M = (0, 5)$. Wyznacz wierzchołki obrazu tego trójkąta w symetrii względem osi Oy. Oblicz pole trójkąta KLM. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Sprawdzian: Geometria analityczna – grupa A

KARTA 8/9

45 minut · 20 pkt

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 20 pkt

Zadanie 1. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są punkty $A = (-3, 5)$ oraz $B = (5, -1)$.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Długość odcinka AB jest równa ___ / 1 pkt

A. $2\sqrt{7}$ **B.** 10 **C.** $\sqrt{10}$ **D.** 14

Zadanie 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Okrąg o równaniu $(x-7)^2 + (y+2)^2 = 18$ ma środek S i promień r, gdzie ___ / 1 pkt

A. $S = (-7, 2)$, $r = 18$ **B.** $S = (7, -2)$, $r = 9$

C. $S = (-7, 2)$, $r = 3\sqrt{2}$ **D.** $S = (7, -2)$, $r = 3\sqrt{2}$

Zadanie 3. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Prosta przechodząca przez punkty $P = (-1, 5)$ i $R = (3, -3)$ ma równanie ___ / 1 pkt

A. $y = 2x + 7$ **B.** $y = -2x + 3$

C. $y = -2x + 5$ **D.** $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

Zadanie 4. Dane są proste k: $3x - 6y + 2 = 0$ oraz l: $y = \frac{1}{2}x - 4$.
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Proste k i l są równoległe.	**P**	**F**
2. Punkt $(4, -1)$ leży na prostej l.	**P**	**F**

Zadanie 5. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Obrazem okręgu $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 5$ w symetrii względem początku układu współrzędnych jest okrąg o równaniu ___ / 1 pkt

A. $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 5$ **B.** $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$

C. $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 5$ **D.** $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5$

Zadanie 6. Dane są punkty $A = (-5, 2)$ i $B = (3, -4)$.
Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe. ___ / 3 pkt

1. Środek odcinka AB ma współrzędne _____ .
2. Długość odcinka AB jest równa _____ .
3. Obrazem punktu B w symetrii względem osi Oy jest punkt _____ .

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Geometria analityczna – kartkówki, sprawdzian i karty pracy z powtórką, matematyka, klasa 3 LO i technikum (zakres podstawowy)

Podgląd pokazał 10 z 30 stron. Pełna wersja: 30 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Geometria analityczna – najważniejsze wiadomości – 3 zadania, 8 pkt
- Karta 2: Geometria analityczna – ćwiczenia – 8 zadań, 26 pkt
- Karta 3: Geometria analityczna – zadania typu maturalnego – 8 zadań, 14 pkt
- Karta 4: Kartkówka 1: odcinki i symetrie w układzie współrzędnych – grupa A – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 5: Kartkówka 1: odcinki i symetrie w układzie współrzędnych – grupa B – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 6: Kartkówka 2: równanie okręgu – grupa A – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 7: Kartkówka 2: równanie okręgu – grupa B – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 8: Sprawdzian: Geometria analityczna – grupa A – 10 zadań, 20 pkt
- Karta 9: Sprawdzian: Geometria analityczna – grupa B – 10 zadań, 20 pkt Karta 1 przypomina teorię i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku.

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail
pierwszalawka.pl/material/matematyka-liceum-klasa-3-dzial-02-geometria-analityczna