PIERWSZA ŁAWKA · 40 ZADAŃ Z JEDNEGO TEMATU · PR · MATEMATYKA · MATURA 2027 · POZIOM ROZSZERZONY

Optymalizacja z pochodną i „wykaż wzór funkcji” – 40 zadań

Zadania z ostatniej wiązki arkusza PR: układanie wzoru funkcji z warunków geometrycznych i kontekstu (wykazywanie wzoru z dziedziną), a następnie wartość największa i najmniejsza wyznaczana pochodną z uzasadnieniem – bryły, figury wpisane, koszty, czas, odległość, prędkość chwilowa, dowody nierówności i zadania z parametrem. 40 zadań otwartych w formule matury rozszerzonej 2027 (2–6 pkt, razem 147 pkt).

Karta	Temat	Zadania
1	**Ściąga: Optymalizacja z pochodną i „wykaż wzór funkcji”. Wzór i pierwsze kroki** krótkie zadania za 2 pkt: wykazanie wzoru funkcji z dziedziną oraz wartość najmniejsza, największa i monotoniczność funkcji danej wzorem	7 zad. 14 pkt
2	**Wzory z kontekstu** zadania za 3 pkt: wykazanie wzoru pola, objętości, kosztu i odległości oraz badanie funkcji danej wzorem	7 zad. 20 pkt
3	**Wartość największa i najmniejsza** zadania za 3–4 pkt: optymalizacja funkcji z poprzedniej sekcji, dowód nierówności pochodną, wzór dla stożka i czasu marszu	7 zad. 23 pkt
4	**Optymalizacja w czterech krokach** zadania za 4 pkt: stożek, czas, najbliższy punkt paraboli, wzór dla ostrosłupa, nierówność, koszt ogrodzenia, prędkość chwilowa	7 zad. 27 pkt
5	**Zadania na pięć punktów** zadania za 5 pkt: ostrosłup, trójkąt ze styczną, stożek opisany na kuli, parametr, średni koszt, ostrosłup wpisany w kulę	6 zad. 30 pkt
6	**Poziom końca arkusza** zadania za 5–6 pkt: bryła w kuli, koszt kabla, trójkąt o stałym obwodzie, walec o stałym polu, liczba rozwiązań, trójkąt ze styczną do pierwiastka	6 zad. 33 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Klucz na końcu: odpowiedzi, zasady oceniania etapami jak w CKE, pełne rozwiązania.

Ściąga: Optymalizacja z pochodną i „wykaż wzór funkcji". Wzór i pierwsze kroki

krótkie zadania za 2 pkt: wykazanie wzoru funkcji z dziedziną oraz wartość najmniejsza, największa i monotoniczność funkcji danej wzorem

KARTA 1/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 14 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Schemat zadania optymalizacyjnego (sześć kroków).** 1) Wskaż wielkość, którą optymalizujesz (pole, objętość, koszt, czas, odległość). 2) Wybierz *jedną* zmienną i opisz inne wielkości za pomocą zależności z treści (Pitagoras, podobieństwo trójkątów, wzór na objętość). 3) Zapisz funkcję jednej zmiennej **wraz z dziedziną**. 4) Policz pochodną i jej miejsca zerowe *w dziedzinie*. 5) **Uzasadnij** ekstremum (znak pochodnej). 6) Oblicz wartość i odpowiedz na pytanie z polecenia (wymiary, wartość, jednostka).
- **„Wykaż, że … wyraża się wzorem …".** To dowód: wyprowadzasz wzór z treści, nie przepisujesz go. Pisz oznaczenia („h – wysokość"), zależność geometryczną, podstawienie, na końcu uzasadnij dziedzinę (długość, promień, wysokość są dodatnie) i napisz „To należało wykazać.". **Sprawdzenie wzoru dla jednej wartości = 0 punktów.**
- **Dziedzina z warunków zadania.** Każda długość musi być dodatnia: z $h = 15 - 2a > 0$ wynika $a < \frac{15}{2}$; z pierwiastka $\sqrt{144 - r^2}$ i $r > 0$ wynika $r \in (0, 12)$. Miejsce zerowe pochodnej spoza dziedziny **odrzucasz** (zapisz dlaczego).
- **Reguły różniczkowania** (są w karcie wzorów): $(x^r)' = rx^{r-1}$ $(r \in \mathbb{R})$, $(fg)' = f'g + fg'$, $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Pierwiastek: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$; $\frac{c}{x} = cx^{-1}$. **Nie ma** „pochodnej ilorazu jako ilorazu pochodnych".
- **Ekstremum i wartość największa (najmniejsza).** $f'(x_0) = 0$ nie wystarcza – pokaż **zmianę znaku** pochodnej (+ → − maksimum, − → + minimum) albo monotoniczność. W przedziale **domkniętym** porównaj wartości w punktach krytycznych i na końcach; w przedziale **otwartym** wystarczy, że funkcja rośnie przed x_0 i maleje po nim (wtedy to wartość największa).
- **Uzasadnienie w CKE.** Brak uzasadnienia, że w punkcie jest wartość największa (najmniejsza), kosztuje co najmniej jeden punkt (ze zwykle czterech). Wartości przybliżone zamiast dokładnych – co najwyżej 1 punkt. Brak dziedziny – utrata punktu. Pominięta pochodna funkcji wewnętrznej – co najwyżej 1 punkt.
- **Ułatwienia.** Gdy $f > 0$, funkcje f i f^2 mają ekstrema w tych samych punktach – pierwiastek można „schować" (np. minimalizuj kwadrat odległości). Stała w funkcji (parametr a) zachowuje się jak liczba: $(x(a - 2x)^2)' = (a - 2x)(a - 6x)$.

Wzory z kontekstu

KARTA 2/6

zadania za 3 pkt: wykazanie wzoru pola, objętości, kosztu i odległości oraz badanie funkcji danej wzorem

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 20 pkt

Zadanie 1. Podstawą graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest trójkąt równoboczny o boku a. Objętość graniastosłupa jest równa 16. Wykaż, że pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa wyraża się wzorem $P(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + \frac{64\sqrt{3}}{a}$, gdzie $a > 0$.

___ / 3 pkt

Zadanie 2. Pojemnik w kształcie prostopadłościanu o podstawie kwadratowej o boku a (w metrach) ma objętość 36 m³ i nie ma pokrywy. Dno kosztuje 40 zł za 1 m², a ściany boczne 15 zł za 1 m². Wykaż, że koszt materiału (w zł) wyraża się wzorem $K(a) = 40a^2 + \frac{2160}{a}$, gdzie $a > 0$.

___ / 3 pkt

Zadanie 3. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 6 - 2\sqrt{x}$ dla $x \in \langle 0, 9\rangle$. Punkty $O = (0, 0)$, $A = (x, 0)$, $B = (x, f(x))$ i $C = (0, f(x))$, gdzie $0 < x < 9$, są wierzchołkami prostokąta. Wykaż, że pole tego prostokąta wyraża się wzorem $P(x) = 6x - 2x\sqrt{x}$.

___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Wartość największa i najmniejsza

zadania za 3–4 pkt: optymalizacja funkcji z poprzedniej sekcji, dowód nierówności pochodną, wzór dla stożka i czasu marszu

KARTA 3/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 23 pkt

Zadanie 1. Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o objętości 54 wyraża się wzorem $P(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + \frac{216\sqrt{3}}{a}$, gdzie $a > 0$ jest długością krawędzi podstawy. Wyznacz a, dla którego pole jest najmniejsze, i oblicz to najmniejsze pole. Zapisz obliczenia.

___ / 3 pkt

Zadanie 2. Pole prostokąta o dwóch bokach leżących na osiach układu współrzędnych i wierzchołku w punkcie $(x, 6 - 2\sqrt{x})$, gdzie $0 < x < 9$, wyraża się wzorem $P(x) = 6x - 2x\sqrt{x}$. Wyznacz wymiary prostokąta o największym polu i oblicz to największe pole. Zapisz obliczenia.

___ / 4 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Optymalizacja w czterech krokach

zadania za 4 pkt: stożek, czas, najbliższy punkt paraboli, wzór dla ostrosłupa, nierówność, koszt ogrodzenia, prędkość chwilowa

KARTA 4/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 27 pkt

Zadanie 1. Tworząca stożka ma długość 18. Objętość stożka o promieniu podstawy r wyraża się wzorem $V(r) = \frac{\pi}{3} r^2 \sqrt{324 - r^2}$ dla $r \in (0, 18)$. Wyznacz promień podstawy stożka o największej objętości i oblicz tę największą objętość. Zapisz obliczenia. ___ / 4 pkt

Zadanie 2. Kurier idzie z punktu A drogą z prędkością 5 km/h do punktu D, a potem prosto przez pole do punktu B z prędkością 4 km/h. Czas marszu (w godzinach) wyraża się wzorem $T(x) = \frac{30 - x}{5} + \frac{\sqrt{81 + x^2}}{4}$, gdzie $x \in \langle 0, 30 \rangle$ jest odległością (w km) punktu D od rzutu C punktu B na drogę. Wyznacz x, dla którego czas jest najkrótszy, i oblicz ten czas. Zapisz obliczenia. ___ / 4 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadania na pięć punktów

zadania za 5 pkt: ostrosłup, trójkąt ze styczną, stożek opisany na kuli, parametr, średni koszt, ostrosłup wpisany w kulę

KARTA 5/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 30 pkt

Zadanie 1. Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi bocznej długości 12 wyraża się wzorem $V(a) = \frac{1}{3}a^2\sqrt{144 - \frac{1}{2}a^2}$ dla $a \in (0, 12\sqrt{2})$, gdzie a jest długością krawędzi podstawy. Dla ostrosłupa o największej objętości oblicz a, tę objętość oraz sinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy. Zapisz obliczenia.

___ / 5 pkt

Zadanie 2. Prosta k jest styczna do wykresu funkcji $f(x) = 9 - x^2$ w punkcie $A = (t, f(t))$, gdzie $0 < t < 3$. Prosta k i dodatnie półosie układu współrzędnych ograniczają trójkąt. Wyznacz t, dla którego pole tego trójkąta jest najmniejsze, i oblicz to najmniejsze pole. Zapisz obliczenia.

___ / 5 pkt

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Matura 2027 matematyka PR – Optymalizacja z pochodną i „wykaż wzór funkcji” – 40 zadań z kluczem i zasadami oceniania

Podgląd pokazał 6 z 49 stron. Pełna wersja: 49 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- 40 nowych zadań otwartych z matematyki na maturę rozszerzoną 2027 z jednego tematu: optymalizacja z pochodną i „wykaż wzór funkcji” – Zadania z ostatniej wiązki arkusza PR: układan
- Na początku ściąga: najważniejsze wzory i twierdzenia z tematu (z zaznaczeniem, co jest w karcie wzorów CKE) i wzorcowe rozwiązanie zapisane tak, jak oczekują egzaminatorzy.
- Zadania w sześciu sekcjach – od krótkich za 2–3 pkt do wieloetapowych za 5–6 pkt (razem 147 pkt), w tym zadania „Wykaż, że…”.
- Polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE 2025–2026.
- Na końcu klucz: odpowiedzi, zasady oceniania etapami (za co kolejne punkty, uwagi w stylu CKE) i przykładowe pełne rozwiązania.
- 49 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.
- Wszystkie zadania są oryginalne – nie powtarzają zadań CKE ani naszych arkuszy próbnych, zestawów i „najczęstszych zadań maturalnych”.
- Wymagania: XIII.R3–XIII.R6 (+ X.2, X.5, VIII.1, VIII.10, IX.3, cel IV).
- Materiał przygotowany zgodnie z podstawą programową matematyki dla liceum i technikum (Dz.U.
- 2018 poz.
- 467 w brzmieniu Dz.U.
- 2024 poz.
- 1019), zakres rozszerzony – obowiązującą na maturze w latach 2027–2030.

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matura-2027-matematyka-rozszerzona-optymalizacja-pochodna-wykaz-wzor-40-zadan