PIERWSZA ŁAWKA · ZESTAW DZIAŁOWY · MATEMATYKA · KLASA 4 LO I TECHNIKUM · ZAKRES PODSTAWOWY

Dział 1. Kombinatoryka: reguła mnożenia i dodawania

Zliczanie obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych: reguła mnożenia i reguła dodawania (także łącznie), drzewko, liczby n-cyfrowe z warunkami, kody, ustawienia, wybory z podziałem na przypadki, dopełnienie i wybór miejsc – bez wzorów na kombinacje (zakres rozszerzony). Dziewięć kart: teoria z przykładami, ćwiczenia, zadania typu maturalnego, dwie kartkówki (A i B) i sprawdzian (A i B) – z kluczem i zasadami oceniania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Kombinatoryka: reguła mnożenia i dodawania – najważniejsze wiadomości** Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka	4 zad. 11 pkt
2	**Kombinatoryka: reguła mnożenia i dodawania – ćwiczenia** Ćwiczę umiejętności z działu	8 zad. 22 pkt
3	**Kombinatoryka: reguła mnożenia i dodawania – zadania typu maturalnego** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	7 zad. 12 pkt
4	**Kartkówka 1: reguła mnożenia – liczby i kody – grupa A** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
5	**Kartkówka 1: reguła mnożenia – liczby i kody – grupa B** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
6	**Kartkówka 2: reguła dodawania, drzewko, ustawienia – grupa A** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
7	**Kartkówka 2: reguła dodawania, drzewko, ustawienia – grupa B** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
8	**Sprawdzian: Kombinatoryka: reguła mnożenia i dodawania – grupa A** 45 minut · 20 pkt	10 zad. 20 pkt
9	**Sprawdzian: Kombinatoryka: reguła mnożenia i dodawania – grupa B** 45 minut · 20 pkt	10 zad. 20 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 przypomina najważniejsze wiadomości z działu i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku – od niej warto zacząć.
- Karta 2 to ćwiczenia, a karta 3 – zadania w formule matury 2027 (polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE).
- Karty 4–7 to dwie kartkówki (po 15 minut), każda w grupach A i B. Karty 8–9 to sprawdzian (45 minut) w grupach A i B – te same typy zadań i ta sama punktacja, inne liczby.
- Klucz na końcu zestawu zawiera odpowiedzi, przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE (kamienie milowe, błąd rachunkowy = −1 pkt).
- Osobny plik „Powtórka” zbiera definicje, wzory (z zaznaczeniem, które są w karcie wzorów CKE), typowe błędy i test „Sprawdź się”.

Materiał oryginalny. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: XI.1, XI.2; cele ogólne III.1, III.2, IV.4. Miejsce w seriach podręczników: NE kl. 4 (w dziale Rachunek prawdopodobieństwa) · Pazdro kl. 3 (Kombinatoryka) · GWO kl. 4 technikum NE kl. 4. Nazwy wydawnictw i serii podano tylko informacyjnie – materiał nie jest z nimi powiązany. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

Kombinatoryka: reguła mnożenia i dodawania – najważniejsze wiadomości

Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka

KARTA 1/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 11 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Reguła mnożenia.** Jeżeli wybór składa się z k kolejnych etapów, pierwszy etap można wykonać na n_1 sposobów, drugi – na n_2 sposobów (bez względu na to, co wybrano wcześniej), …, ostatni – na n_k sposobów, to cały wybór można wykonać na $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ sposobów. Przykład: 3 rodzaje pieczywa i 5 rodzajów sera dają $3 \cdot 5 = 15$ różnych kanapek.
- **Reguła dodawania.** Jeżeli obiekty dzielimy na grupy (przypadki), które się nie pokrywają i razem obejmują wszystkie obiekty, to liczba wszystkich obiektów jest sumą liczebności tych grup. Wskazówka językowa: etap pierwszy **i** etap drugi – mnożymy; przypadek pierwszy **albo** przypadek drugi – dodajemy.
- **Drzewko** pokazuje wszystkie możliwości: każdy poziom to jeden etap, każda gałąź – jeden wybór, każda ścieżka od korzenia do końca – jeden wynik. Pomaga zwłaszcza wtedy, gdy liczba możliwości na kolejnym etapie zależy od wcześniejszego wyboru (np. cyfry nie mogą się powtarzać).
- **Liczby a kody.** Liczba n-cyfrowa nie zaczyna się od zera: na pierwszym miejscu jest 9 możliwości (cyfry 1–9), na pozostałych po 10 (0–9); liczb trzycyfrowych jest $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$. Kod (PIN, numer) może zaczynać się od 0: kodów trzycyfrowych jest $10^3 = 1000$. Liczba parzysta kończy się cyfrą 0, 2, 4, 6 lub 8 (zero jest liczbą parzystą), liczba podzielna przez 5 – cyfrą 0 lub 5.
- **Z powtórzeniami i bez powtórzeń.** Gdy elementy mogą się powtarzać, na każdym miejscu jest tyle samo możliwości. Gdy muszą być **różne**, na każdym kolejnym miejscu jest o jedną możliwość mniej. n różnych osób można ustawić w szeregu na $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ sposobów (zapis skrócony: $n!$ – „n silnia”), np. 4 osoby – na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ sposoby.
- **Strategia.** Zaczynaj od miejsca z ograniczeniem (ostatnia cyfra parzysta, pierwsza cyfra różna od 0). Gdy cyfry mają być różne, a warunki dotyczą i pierwszej, i ostatniej cyfry, rozbij zadanie na **przypadki**, np. „ostatnia cyfra to 0” oraz „ostatnia cyfra jest parzysta, ale różna od 0”, i dodaj wyniki.
- **Dopełnienie.** Zamiast liczyć obiekty „z co najmniej jedną …”, policz wszystkie i odejmij te „bez żadnej …”. Przykład: kodów trzycyfrowych z co najmniej jedną cyfrą 9 jest $10^3 - 9^3 = 1000 - 729 = 271$.
- **Wybór miejsc.** Gdy kilka **jednakowych** cyfr ma stać na wybranych miejscach, liczymy zbiory miejsc, a nie kolejność ich wybierania. Dwa miejsca spośród czterech: (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) – 6 możliwości. Iloczyn $4 \cdot 3 = 12$ liczy każdą parę miejsc dwa razy – to „błąd multiplikacji” opisany w sprawozdaniu CKE z matury 2024.

- W karcie wzorów CKE (dział „Kombinatoryka”) są wzory na liczbę permutacji i wariacji – w zakresie podstawowym wystarczy reguła mnożenia i dodawania. Kombinacje i symbol Newtona to zakres rozszerzony.

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. Ile jest liczb czterocyfrowych podzielnych przez 5?

Cyfra tysięcy: 9 możliwości (1–9). Cyfra setek i cyfra dziesiątek: po 10 możliwości. Cyfra jedności: 2 możliwości (0 lub 5).

Z reguły mnożenia: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 1800$.

Przykład 2. Ile jest liczb czterocyfrowych parzystych o różnych cyfrach?

Ostatnia cyfra ma być parzysta, a pierwsza – różna od 0. Te warunki „zderzają się” przy zerze, więc rozważamy dwa przypadki.

Przypadek 1: cyfra jedności to 0. Cyfra tysięcy: 9 możliwości (1–9), setek: 8 (bez dwóch użytych cyfr), dziesiątek: 7. Razem $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

Przypadek 2: cyfra jedności to 2, 4, 6 lub 8 – 4 możliwości. Cyfra tysięcy: 8 możliwości (bez zera i bez cyfry jedności), setek: 8 (zero znów można użyć, odpadają dwie użyte cyfry), dziesiątek: 7. Razem $4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 1792$.

Przypadki się wykluczają, więc z reguły dodawania: $504 + 1792 = 2296$.

Przykład 3. Z miasta A do miasta B prowadzą 3 drogi, z B do C – 2 drogi, a z A do C, z pominięciem B – 2 drogi. Ile jest różnych tras z A do C?

Trasy przez B: droga A–B i droga B–C – reguła mnożenia: $3 \cdot 2 = 6$.

Trasy z pominięciem B: 2.

Trasa prowadzi przez B **albo** omija B – reguła dodawania: $6 + 2 = 8$ tras.

Przykład 4. Ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie występuje co najmniej jedna cyfra 3?

Liczymy dopełnienie. Wszystkich liczb czterocyfrowych: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$.

Liczb czterocyfrowych bez cyfry 3: cyfra tysięcy – 8 możliwości (1–9 bez 3), pozostałe – po 9 (0–9 bez 3): $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$.

Szukana liczba: $9000 - 5832 = 3168$.

Przykład 5. Ile jest kodów czterocyfrowych (cyfry od 0 do 9 mogą się powtarzać), w których cyfra 7 występuje dokładnie dwa razy?

Etap 1: wybieramy miejsca dla dwóch siódemek. Wypisujemy pary miejsc: (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) – 6 możliwości (obie cyfry to 7, więc kolejność wyboru miejsc nie ma znaczenia).

Etap 2: na dwóch pozostałych miejscach stoją cyfry różne od 7 – po 9 możliwości: $9 \cdot 9 = 81$.

Wynik: $6 \cdot 81 = 486$. Iloczyn $4 \cdot 3 \cdot 81 = 972$ jest dwa razy za duży – każdą parę miejsc policzono dwukrotnie.

ZADANIA

Zadanie 1. Uzupełnij. ___ / 4 pkt

1. W barze są 4 rodzaje kanapek i 3 rodzaje soków. Zestaw to jedna kanapka i jeden sok. Różnych zestawów jest _____ .
2. Liczb dwucyfrowych jest _____ .
3. Kodów trzycyfrowych (cyfry od 0 do 9 mogą się powtarzać) jest _____ .
4. Liczb trzycyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 1, 2 i 3, jest _____ .

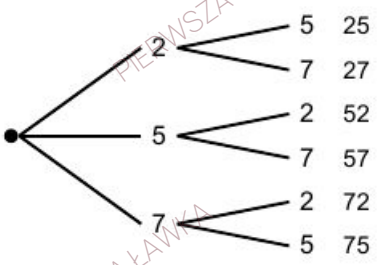
Zadanie 2. Na ile sposobów można ustawić na półce 4 różne książki? ___ / 1 pkt

A. 16 **B.** 4 **C.** 24 **D.** 10

Zadanie 3. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 3 pkt

1. Liczb trzycyfrowych jest 999.	**P**	**F**
2. Liczb dwucyfrowych parzystych jest 45.	**P**	**F**
3. Kodów PIN złożonych z czterech cyfr jest $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$.	**P**	**F**

Zadanie 4. Na rysunku przedstawiono drzewko, które pokazuje wszystkie liczby dwucyfrowe o różnych cyfrach utworzone z cyfr 2, 5, 7. Uzupełnij. ___ / 3 pkt



1. Takich liczb jest _____ .
2. Liczb parzystych wśród nich jest _____ .
3. Liczb większych od 50 wśród nich jest _____ .

PIERWSZA ŁAWKA

Kombinatoryka: reguła mnożenia i dodawania – ćwiczenia

KARTA 2/9

Ćwiczę umiejętności z działu

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 22 pkt

Zadanie 1. Oblicz, ile jest liczb spełniających warunek. ___ / 4 pkt

1. liczb trzycyfrowych nieparzystych: _____
2. liczb czterocyfrowych, w których zapisie wszystkie cyfry są nieparzyste: _____
3. liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach: _____
4. liczb dwucyfrowych podzielnych przez 5: _____

Zadanie 2. Liczb sześciocyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry 4 i 9, jest ___ / 1 pkt

A. 64 **B.** 36 **C.** 32 **D.** 12

Zadanie 3. Zestaw obiadowy w stołówce składa się z przystawki, dania głównego i deseru. Przystawką jest jedna z 2 zup albo jedna z 3 sałatek. Danie główne wybiera się spośród 4 dań. Deserem jest jedno z 2 ciast, można też z deseru zrezygnować. Oblicz, ile różnych zestawów można wybrać. ___ / 2 pkt

Zadanie 4. Identyfikator składa się z dwóch liter wybranych spośród 20 liter i trzech cyfr, np. KP 037. Litery i cyfry mogą się powtarzać. Oblicz, ile jest różnych identyfikatorów. Oblicz, ile jest identyfikatorów, w których obie litery są różne i wszystkie cyfry są różne. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 5. Dopasuj do każdej sytuacji (1–4) iloczyn (a–d), który opisuje liczbę możliwości.

___ / 4 pkt

1. liczby trzycyfrowe o różnych cyfrach	a) $10 \cdot 10 \cdot 10$
2. kody trzycyfrowe o różnych cyfrach	b) $9 \cdot 9 \cdot 8$
3. liczby trzycyfrowe	c) $9 \cdot 10 \cdot 10$
4. kody trzycyfrowe	d) $10 \cdot 9 \cdot 8$

1 ____ 2 ____ 3 ____ 4 ____

Zadanie 6. Oblicz, ile jest liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach, które są podzielne przez 5.

___ / 3 pkt

Zadanie 7. Oblicz, ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie występuje co najmniej jedna cyfra 0.

___ / 2 pkt

Zadanie 8. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

___ / 3 pkt

1. Pięć różnych osób można ustawić w kolejce na 120 sposobów.	**P**	**F**
2. Spośród 25 uczniów można wybrać przewodniczącego klasy i jego zastępcę na 625 sposobów.	**P**	**F**
3. Trzy różne nagrody można rozdać pięciu osobom na 125 sposobów, jeśli jedna osoba może dostać kilka nagród.	**P**	**F**

PIERWSZA ŁAWKA

Kartkówka 1: reguła mnożenia – liczby i kody – grupa A

KARTA 4/9

15 minut · 8 pkt

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

Zadanie 1. Oblicz, ile jest obiektów opisanych w zdaniu. ___ / 2 pkt

1. Liczb trzycyfrowych podzielnych przez 5 jest _____ .
2. Kodów pięciocyfrowych (cyfry od 0 do 9 mogą się powtarzać) jest _____ .

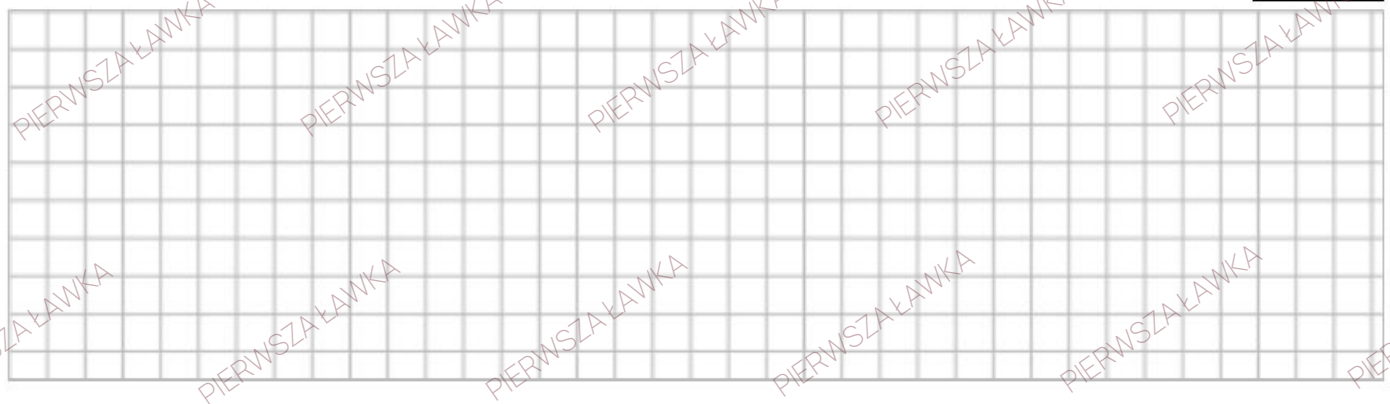
Zadanie 2. Liczb dwucyfrowych o różnych cyfrach jest ___ / 1 pkt

A. 90 **B.** 72 **C.** 100 **D.** 81

Zadanie 3. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 2 pkt

1. Liczb dwucyfrowych, w których obie cyfry są parzyste, jest 20.	**P**	**F**
2. Liczb dwucyfrowych, w których cyfra dziesiątek jest równa cyfrze jedności, jest 10.	**P**	**F**

Zadanie 4. Oblicz, ile jest liczb trzycyfrowych parzystych o różnych cyfrach. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt



Podgląd • Pierwsza Ławka

Sprawdzian: Kombinatoryka: reguła mnożenia i dodawania – grupa A

45 minut · 20 pkt

KARTA 8/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 20 pkt

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry 1, 4, 7, jest

___ / 1 pkt

A. $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ **B.** $3 \cdot 4$ **C.** 3^4 **D.** 4^3

Zadanie 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych o różnych cyfrach, w których cyfrą tysięcy jest 5, jest

___ / 1 pkt

A. 720 **B.** 504 **C.** 729 **D.** 1000

Zadanie 3. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, w których cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności, jest

___ / 1 pkt

A. 72 **B.** 81 **C.** 36 **D.** 45

Zadanie 4. W drużynie jest 12 zawodników. Trener wybiera spośród nich kapitana i wicekapitana (dwie różne osoby).
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczba wszystkich możliwych wyborów jest równa

___ / 1 pkt

A. 66 **B.** 132 **C.** 144 **D.** 24

Zadanie 5. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

___ / 1 pkt

1. Liczb trzycyfrowych, w których cyfra setek jest parzysta, jest 400.	**P**	**F**
2. Liczb dwucyfrowych, których obie cyfry są różne i różne od zera, jest 81.	**P**	**F**

Zadanie 6. Na półce ustawiamy w rzędzie 5 różnych książek, w tym dwa tomy słownika.
Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

___ / 3 pkt

1. Wszystkich ustawień jest _____ .
2. Ustawień, w których oba tomy słownika stoją obok siebie, jest _____ .
3. Ustawień, w których tomy słownika stoją na obu końcach rzędu, jest _____ .

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Kombinatoryka: reguła mnożenia i dodawania – kartkówki, sprawdzian i karty pracy z powtórką, matematyka, klasa 4 LO i technikum (zakres

Podgląd pokazał 9 z 27 stron. Pełna wersja: 27 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Kombinatoryka: reguła mnożenia i dodawania – najważniejsze wiadomości – 4 zadania, 11 pkt
- Karta 2: Kombinatoryka: reguła mnożenia i dodawania – ćwiczenia – 8 zadań, 22 pkt
- Karta 3: Kombinatoryka: reguła mnożenia i dodawania – zadania typu maturalnego – 7 zadań, 12 pkt
- Karta 4: Kartkówka 1: reguła mnożenia – liczby i kody – grupa A – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 5: Kartkówka 1: reguła mnożenia – liczby i kody – grupa B – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 6: Kartkówka 2: reguła dodawania, drzewko, ustawienia – grupa A – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 7: Kartkówka 2: reguła dodawania, drzewko, ustawienia – grupa B – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 8: Sprawdzian: Kombinatoryka: reguła mnożenia i dodawania – grupa A – 10 zadań, 20 pkt
- Karta 9: Sprawdzian: Kombinatoryka: reguła mnożenia i dodawania – grupa B – 10 zadań, 20 pkt

Karta 1 przypomina teorię i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku.

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matematyka-liceum-klasa-4-dzial-01-kombinatoryka-regula-mnozenia-i-dodawania