PIERWSZA ŁAWKA · ZESTAW DZIAŁOWY · MATEMATYKA · KLASA 2 LO I TECHNIKUM · ZAKRES PODSTAWOWY

Dział 7. Planimetria: twierdzenie cosinusów, pola, punkty szczególne, dowody geometryczne

Twierdzenie cosinusów (trzeci bok, kąt z trzech boków), rozpoznawanie trójkątów ostrokątnych, prostokątnych i rozwartokątnych, pole trójkąta ½ab sin γ, pola równoległoboków, rombów i wielokątów z trygonometrią, środek okręgu opisanego i wpisanego, środek ciężkości, ortocentrum, trójkąt równoboczny (R i r), dowody geometryczne w stylu matury 2026. Dziewięć kart: teoria z przykładami, ćwiczenia, zadania typu maturalnego, dwie kartkówki (A i B) i sprawdzian (A i B) – z kluczem i zasadami oceniania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Planimetria: twierdzenie cosinusów, pola, punkty szczególne, dowody geometryczne – najważniejsze wiadomości** Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka	3 zad. 7 pkt
2	**Planimetria: twierdzenie cosinusów, pola, punkty szczególne, dowody geometryczne – ćwiczenia** Ćwiczę umiejętności z działu	8 zad. 24 pkt
3	**Planimetria: twierdzenie cosinusów, pola, punkty szczególne, dowody geometryczne – zadania typu maturalnego** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	8 zad. 12 pkt
4	**Kartkówka 1: twierdzenie cosinusów i pole trójkąta – grupa A** 15 minut · 7 pkt	4 zad. 7 pkt
5	**Kartkówka 1: twierdzenie cosinusów i pole trójkąta – grupa B** 15 minut · 7 pkt	4 zad. 7 pkt
6	**Kartkówka 2: punkty szczególne trójkąta – grupa A** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
7	**Kartkówka 2: punkty szczególne trójkąta – grupa B** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
8	**Sprawdzian: Planimetria: twierdzenie cosinusów, pola, punkty szczególne, dowody geometryczne – grupa A** 45 minut · 21 pkt	10 zad. 21 pkt

9	**Sprawdzian: Planimetria: twierdzenie cosinusów, pola, punkty szczególne, dowody geometryczne – grupa B** 45 minut · 21 pkt	10 zad. 21 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 przypomina najważniejsze wiadomości z działu i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku – od niej warto zacząć.
- Karta 2 to ćwiczenia, a karta 3 – zadania w formule matury 2027 (polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE).
- Karty 4–7 to dwie kartkówki (po 15 minut), każda w grupach A i B. Karty 8–9 to sprawdzian (45 minut) w grupach A i B – te same typy zadań i ta sama punktacja, inne liczby.
- Klucz na końcu zestawu zawiera odpowiedzi, przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE (kamienie milowe, błąd rachunkowy = −1 pkt).
- Osobny plik „Powtórka” zbiera definicje, wzory (z zaznaczeniem, które są w karcie wzorów CKE), typowe błędy i test „Sprawdź się”.

Materiał oryginalny. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: VII.3, VIII.2, VIII.10, VIII.11, VIII.12; cele ogólne III.1, IV.1, IV.3; dowody PP pkt 9 i 10; twierdzenie sinusów – zakres rozszerzony (VII.R7), tylko informacja. Miejsce w seriach podręczników: NE kl. 2 (dowody – kl. 4) · Pazdro kl. 2 · GWO kl. 2; technikum NE kl. 2–3. Nazwy wydawnictw i serii podano tylko informacyjnie – materiał nie jest z nimi powiązany. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

PIERWSZA ŁAWKA

Planimetria: twierdzenie cosinusów, pola, punkty szczególne, dowody geometryczne – najważniejsze wiadomości

Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka

KARTA 1/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 7 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Twierdzenie cosinusów.** W każdym trójkącie o bokach a, b, c, w którym γ jest kątem między bokami a i b (czyli naprzeciw boku c): $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Dla $\gamma = 90°$ to twierdzenie Pitagorasa. Stosujemy je, gdy znamy dwa boki i kąt między nimi (liczymy trzeci bok) albo trzy boki (liczymy kąt: $\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$).
- **Rodzaj trójkąta.** Niech c będzie najdłuższym bokiem. Znak liczby $a^2 + b^2 - c^2$ jest znakiem $\cos\gamma$: jeżeli $c^2 < a^2 + b^2$, trójkąt jest ostrokątny; jeżeli $c^2 = a^2 + b^2$ – prostokątny; jeżeli $c^2 > a^2 + b^2$ – rozwartokątny. Naprzeciw większego kąta leży dłuższy bok.
- **Pola.** Trójkąt: $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ (γ – kąt między bokami a i b). Równoległobok o bokach a, b i kącie α między nimi: $P = ab\sin\alpha$; romb o boku a: $P = a^2\sin\alpha$. Wielokąt dzielimy przekątną na trójkąty i dodajemy ich pola. Pamiętaj: $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, np. $\sin 150° = \frac{1}{2}$.
- **Środek okręgu opisanego** na trójkącie to punkt przecięcia symetralnych boków – jest jednakowo odległy od wierzchołków (o promień R). W trójkącie ostrokątnym leży wewnątrz trójkąta, w prostokątnym – w środku przeciwprostokątnej ($R = \frac{c}{2}$), w rozwartokątnym – na zewnątrz trójkąta.
- **Środek okręgu wpisanego** w trójkąt to punkt przecięcia dwusiecznych kątów – jest jednakowo odległy od boków (o promień r) i leży zawsze wewnątrz trójkąta. $P = r \cdot p$, gdzie p to połowa obwodu. W trójkącie prostokątnym $r = \frac{a + b - c}{2}$ (c – przeciwprostokątna).
- **Środek ciężkości** to punkt przecięcia środkowych (odcinków łączących wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku); dzieli każdą środkową w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka. **Ortocentrum** to punkt przecięcia prostych zawierających wysokości; w trójkącie prostokątnym jest wierzchołkiem kąta prostego, w rozwartokątnym leży na zewnątrz trójkąta.
- **Trójkąt równoboczny o boku a:** wszystkie cztery punkty szczególne pokrywają się. Wysokość $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, czyli $R = 2r$. Uwaga: R to nie wysokość ani bok – w 2026 r. tylko 27% zdających poprawnie obliczyło bok trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg.

- **Dowód geometryczny na PP (2–3 pkt).** Opisz każdy wprowadzony element (np. „h – odległość punktu A od prostej BC, czyli wysokość trójkątów ABD i ADC”). Każdą równość kątów, odcinków i pól uzasadnij nazwą twierdzenia albo cechy. Nie przyjmuj konkretnych miar ani długości – według zasad CKE za taki „dowód” jest 0 pkt – i nie wnioskuj z rysunku. Zakończ tezą: „To należało wykazać.”
- W karcie wzorów CKE są: twierdzenie cosinusów, wzory na pole trójkąta (także $P = r \cdot p$, $P = \frac{abc}{4R}$), R i r w trójkącie prostokątnym i równobocznym, pola czworokątów. Jest tam też twierdzenie sinusów – to zakres rozszerzony. Nie ma kryterium rodzaju trójkąta, podziału środkowej w stosunku 2 : 1 ani położenia punktów szczególnych.

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. Dwa boki trójkąta mają długości 5 i 8, a kąt między nimi ma miarę 60°. Oblicz długość trzeciego boku i pole trójkąta.

Z twierdzenia cosinusów: $c^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60° = 25 + 64 - 40 = 49$, więc $c = 7$.

Pole: $P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin 60° = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$.

Przykład 2. Boki trójkąta mają długości 7, 8 i 13. Oblicz miarę największego kąta tego trójkąta i jego pole.

Największy kąt γ leży naprzeciw najdłuższego boku (13): $13^2 = 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8\cos\gamma$, $169 = 113 - 112\cos\gamma$, $\cos\gamma = -\frac{1}{2}$, więc $\gamma = 120°$ (trójkąt rozwartokątny).

Pole: $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \cdot \sin 120° = 28 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$.

Przykład 3. Trójkąt równoboczny ma bok długości 12. Oblicz jego wysokość oraz promienie okręgów opisanego na nim i wpisanego w niego.

$h = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$. Środek obu okręgów to środek ciężkości, który dzieli wysokość w stosunku 2 : 1:

$R = \frac{2}{3}h = 4\sqrt{3}$, $r = \frac{1}{3}h = 2\sqrt{3}$.

Przykład 4. W trójkącie *ABC* punkt *D* jest środkiem boku *BC*. Wykaż, że trójkąty *ABD* i *ADC* mają równe pola.

Niech h oznacza odległość punktu A od prostej BC. Punkty B, D, C leżą na prostej BC, więc h jest wysokością trójkąta ABD poprowadzoną z wierzchołka A i jednocześnie wysokością trójkąta ADC poprowadzoną z wierzchołka A (wspólna wysokość).

$P_{ABD} = \frac{1}{2}|BD| \cdot h$, $P_{ADC} = \frac{1}{2}|DC| \cdot h$, a $|BD| = |DC|$, bo D jest środkiem BC. Zatem $P_{ABD} = P_{ADC}$. To należało wykazać.

Uwaga: samo „h” bez opisu, czyją jest wysokością, zasady CKE oceniają na 0 pkt.

Przykład 5. Trójkąt ma boki długości 9, 12 i 15. Jaki to trójkąt? Oblicz promienie okręgów opisanego i wpisanego oraz odległość środka ciężkości od wierzchołka największego kąta.

$9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2$ – trójkąt prostokątny (twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa).

$R = \frac{15}{2} = 7{,}5$ (środek przeciwprostokątnej), $r = \frac{9 + 12 - 15}{2} = 3$ (sprawdzenie: $P = 54$, $p = 18$, $r = \frac{54}{18} = 3$).

Środkowa z wierzchołka kąta prostego kończy się w środku przeciwprostokątnej, ma więc długość $R = 7{,}5$. Środek ciężkości leży w $\frac{2}{3}$ tej środkowej: $\frac{2}{3} \cdot 7{,}5 = 5$.

ZADANIA

Zadanie 1. Trójkąt równoboczny ma bok długości 6. Uzupełnij. ___ / 3 pkt

1. Wysokość tego trójkąta ma długość _____ .
2. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy _____ .
3. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy _____ .

Zadanie 2. Dwa boki trójkąta mają długości 2 i 3, a kąt między nimi ma miarę 60°. Trzeci bok ma długość ___ / 1 pkt

A. $\sqrt{19}$ **B.** $\sqrt{7}$ **C.** 7 **D.** 1

Zadanie 3. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 3 pkt

1. Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem przeciwprostokątnej.	**P**	**F**
2. Środek okręgu wpisanego w trójkąt jest punktem przecięcia symetralnych jego boków.	**P**	**F**
3. Środek ciężkości dzieli każdą środkową w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka.	**P**	**F**

PIERWSZA ŁAWKA

Planimetria: twierdzenie cosinusów, pola, punkty szczególne, dowody geometryczne – ćwiczenia

KARTA 2/9

Ćwiczę umiejętności z działu

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 24 pkt

Zadanie 1. Dwa boki trójkąta mają długości 6 i 10, a kąt między nimi ma miarę 120°. Oblicz długość trzeciego boku i pole trójkąta. ___ / 3 pkt

Zadanie 2. Boki trójkąta mają długości 3, 7 i 8. Oblicz miarę kąta leżącego naprzeciw boku długości 7 i pole trójkąta. ___ / 3 pkt

Zadanie 3. Określ, czy trójkąt o podanych bokach jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny. ___ / 3 pkt

1. 5, 12, 14: _____
2. 7, 9, 11: _____
3. 12, 35, 37: _____

Zadanie 4. Równoległobok ma boki długości 8 i 5, a jego kąt ostry ma miarę 60°. Oblicz pole równoległoboku i długości jego przekątnych. ___ / 3 pkt

Zadanie 5. Trójkąt *ABC* ma boki |*BC*| = 7, |*AC*| = 24 i |*AB*| = 25, a *S* jest jego środkiem ciężkości. Uzupełnij. ___ / 3 pkt

1. Promień okręgu opisanego na trójkącie *ABC* jest równy _____ .
2. Promień okręgu wpisanego w trójkąt *ABC* jest równy _____ .
3. Odległość |*CS*| jest równa _____ .

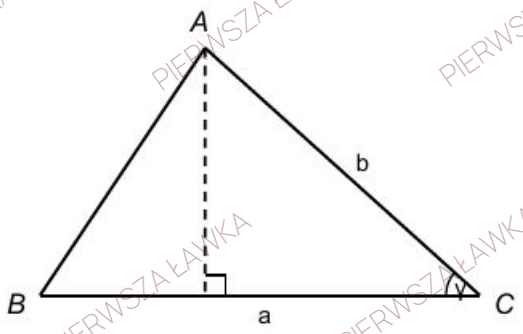
Zadanie 6. Dopasuj do każdego punktu szczególnego trójkąta (1–4) proste, które się w nim przecinają (a–e). Jedna odpowiedź nie pasuje. ___ / 4 pkt

1. środek okręgu opisanego
2. środek okręgu wpisanego
3. środek ciężkości
4. ortocentrum

a) dwusieczne kątów
b) proste zawierające wysokości
c) symetralne boków
d) środkowe
e) proste równoległe do boków poprowadzone przez przeciwległe wierzchołki

1 ____ 2 ____ 3 ____ 4 ____

Zadanie 7. Dany jest trójkąt *ABC*, w którym |*BC*| = *a*, |*AC*| = *b*, a kąt *ACB* jest ostry i ma miarę γ (zobacz rysunek). Wykaż, że pole trójkąta *ABC* jest równe $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$. ___ / 2 pkt



Podgląd • Pierwsza Ławka

Planimetria: twierdzenie cosinusów, pola, punkty szczególne, dowody geometryczne – zadania typu maturalnego

Polecenia i punktacja jak na maturze 2027

KARTA 3/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 12 pkt

Zadanie 1. Dwa boki trójkąta mają długości 4 i 7, a kąt między nimi ma miarę 60°.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Trzeci bok tego trójkąta ma długość ___ / 1 pkt

A. $\sqrt{37}$ **B.** 37 **C.** $\sqrt{65}$ **D.** $\sqrt{93}$

Zadanie 2. Trójkąt *ABC* ma boki długości 3, 5 i 7.
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Trójkąt *ABC* jest rozwartokątny.	**P**	**F**
2. Pole trójkąta *ABC* jest równe $\frac{15\sqrt{3}}{2}$.	**P**	**F**

Zadanie 3. W okrąg o promieniu 8 wpisano trójkąt równoboczny.
Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe. ___ / 2 pkt

1. Bok tego trójkąta ma długość _____ .
2. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy _____ .

Zadanie 4. Środkowa *AD* trójkąta *ABC* ma długość 15, a punkt *S* jest środkiem ciężkości tego trójkąta.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Odcinek *AS* ma długość ___ / 1 pkt

A. 7,5 **B.** 5 **C.** 12 **D.** 10

Zadanie 5. Równoległobok ma boki długości 6 i 10, a jego kąt rozwarty ma miarę 135°.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Pole tego równoległoboku jest równe ___ / 1 pkt

A. $15\sqrt{2}$ **B.** 30 **C.** $30\sqrt{2}$ **D.** $60\sqrt{2}$

Zadanie 6. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 8 i 15 jest równy ___ / 1 pkt

A. 8,5 **B.** 3 **C.** 6 **D.** 4

Podgląd • Pierwsza Ławka

Kartkówka 1: twierdzenie cosinusów i pole trójkąta – grupa A

15 minut · 7 pkt

KARTA 4/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 7 pkt

Zadanie 1. Dwa boki trójkąta mają długości 5 i 6, a kąt między nimi ma miarę 120°. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Trzeci bok tego trójkąta ma długość ___ / 1 pkt

A. $\sqrt{31}$ **B.** 11 **C.** 91 **D.** $\sqrt{91}$

Zadanie 2. Dwa boki trójkąta mają długości 12 i 9, a kąt między nimi ma miarę 150°. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Pole tego trójkąta jest równe ___ / 1 pkt

A. 27 **B.** 54 **C.** $27\sqrt{3}$ **D.** $54\sqrt{3}$

Zadanie 3. Boki trójkąta mają długości 5, 16 i 19. Oblicz miarę kąta leżącego naprzeciw najdłuższego boku i pole tego trójkąta. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 4. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 2 pkt

1. Trójkąt o bokach 6, 7, 10 jest rozwartokątny.	**P**	**F**
2. W trójkącie o bokach 9, 10, 12 cosinus największego kąta jest ujemny.	**P**	**F**

Podgląd • Pierwsza Ławka

Sprawdzian: Planimetria: twierdzenie cosinusów, pola, punkty szczególne, dowody geometryczne – grupa A

KARTA 8/9

45 minut · 21 pkt

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 21 pkt

Zadanie 1. Dwa boki trójkąta mają długości 4 i 5, a kąt między nimi ma miarę 60°.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Trzeci bok tego trójkąta ma długość ___ / 1 pkt

A. $\sqrt{21}$ **B.** 21 **C.** 3 **D.** $\sqrt{61}$

Zadanie 2. Romb ma bok długości 8 i kąt ostry o mierze 30°.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Pole tego rombu jest równe ___ / 1 pkt

A. 16 **B.** 64 **C.** $32\sqrt{3}$ **D.** 32

Zadanie 3. Boki trójkąta mają długości 4, 5 i 6.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Cosinus największego kąta tego trójkąta jest równy ___ / 1 pkt

A. $\frac{9}{16}$ **B.** $\frac{1}{8}$ **C.** $-\frac{1}{8}$ **D.** $\frac{3}{4}$

Zadanie 4. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Ortocentrum trójkąta prostokątnego pokrywa się z wierzchołkiem kąta prostego.	**P**	**F**
2. Środek okręgu opisanego na trójkącie rozwartokątnym leży wewnątrz tego trójkąta.	**P**	**F**

Zadanie 5. Wysokość trójkąta równobocznego ma długość 9.
Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe. ___ / 2 pkt

1. Bok tego trójkąta ma długość _____ .
2. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy _____ .

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Planimetria: twierdzenie cosinusów, pola, punkty szczególne, dowody geometryczne – kartkówki, sprawdzian i karty pracy z powtórką, matematyka,

Podgląd pokazał 10 z 32 stron. Pełna wersja: 32 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Planimetria: twierdzenie cosinusów, pola, punkty szczególne, dowody geometryczne – najważniejsze wiadomości – 3 zadania, 7 pkt
- Karta 2: Planimetria: twierdzenie cosinusów, pola, punkty szczególne, dowody geometryczne – ćwiczenia – 8 zadań, 24 pkt
- Karta 3: Planimetria: twierdzenie cosinusów, pola, punkty szczególne, dowody geometryczne – zadania typu maturalnego – 8 zadań, 12 pkt
- Karta 4: Kartkówka 1: twierdzenie cosinusów i pole trójkąta – grupa A – 4 zadania, 7 pkt
- Karta 5: Kartkówka 1: twierdzenie cosinusów i pole trójkąta – grupa B – 4 zadania, 7 pkt
- Karta 6: Kartkówka 2: punkty szczególne trójkąta – grupa A – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 7: Kartkówka 2: punkty szczególne trójkąta – grupa B – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 8: Sprawdzian: Planimetria: twierdzenie cosinusów, pola, punkty szczególne, dowody geometryczne – grupa A – 10 zadań, 21 pkt
- Karta 9: Sprawdzian: Planimetria: twierdzenie cosinusów, pola, punkty szczególne, dowody geometryczne – grupa B – 10 zadań, 21 pkt Karta 1 przypomina teorię i pokazuje przykłady ro

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matematyka-liceum-klasa-2-dzial-07-planimetria-twierdzenie-cosinusow-pola-punkty-sz