PIERWSZA ŁAWKA · NAJCZĘSTSZE ZADANIA MATURALNE · PR · MATEMATYKA · MATURA 2027 · POZIOM ROZSZERZONY

D. Równania trygonometryczne

Równania trygonometryczne w zbiorze liczb rzeczywistych i w przedziale: równania elementarne i serie rozwiązań, rozkład na czynniki, podstawienie z warunkiem $|t| \leq 1$, sprowadzenie do jednej funkcji, wzory na sinus i cosinus sumy, kąt podwojony, sumy sinusów i cosinusów, równania jednorodne (tangens z uzasadnieniem $\cos x \neq 0$), podnoszenie do kwadratu ze sprawdzeniem, równania z parametrem. Sześć kart: wzorcowe rozwiązania i zasady oceniania CKE, trening, zadania na poziomie matury, zadania trudniejsze i test w grupach A i B – z kluczem i schematami punktowania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Równania trygonometryczne – jak rozwiązywać i jak oceni to CKE** Wzorcowe rozwiązania, pułapki, rozgrzewka	4 zad. 11 pkt
2	**Równania trygonometryczne – trening** Zadania krok po kroku	7 zad. 18 pkt
3	**Równania trygonometryczne – zadania na poziomie matury** Polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE 2025–2026	6 zad. 25 pkt
4	**Równania trygonometryczne – zadania trudniejsze** Dla ambitnych – nietypowe ujęcia tego samego typu	5 zad. 21 pkt
5	**Test: Równania trygonometryczne – grupa A** 50 minut · 17 pkt	5 zad. 17 pkt
6	**Test: Równania trygonometryczne – grupa B** 50 minut · 17 pkt	5 zad. 17 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 pokazuje, jak CKE ocenia ten typ zadań (kamienie milowe, typowe uwagi w zasadach oceniania) oraz wzorcowe rozwiązania krok po kroku.
- Karty 2–4 prowadzą od treningu, przez zadania na poziomie matury, do zadań trudniejszych.
- Karty 5 i 6 to równoległy test (grupa A i B) z punktacją jak na maturze.
- Klucz zawiera odpowiedzi, przykładowe pełne rozwiązania i zasady oceniania w stylu CKE 2026.
- Osobny plik „Powtórka" zbiera wzory (z podziałem: są w karcie wzorów / trzeba pamiętać), typowe błędy z sprawozdań CKE i test „Sprawdź się".

Materiał oryginalny – żadne zadanie nie jest kopią zadania CKE. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: VII.R2–VII.R6 (+ VII.2, III.4, V.9); cele ogólne I, IV.3, IV.4; dowody PR pkt 5. Częstość na maturze: równanie

Równania trygonometryczne – jak rozwiązywać i jak oceni to CKE

Wzorcowe rozwiązania, pułapki, rozgrzewka

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 11 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Gdzie w arkuszu.** Równanie trygonometryczne było w każdym arkuszu rozszerzonym 2023–2026 (za 3, 5, 5 i 4 pkt) oraz w arkuszu pokazowym. Przedział zmienia się co rok: $\mathbb{R}$, $\langle 0, 2\pi\rangle$, $\langle -\pi, \pi\rangle$, znowu $\mathbb{R}$. Poziom wykonania: 45%, 29%, 22%, 29% – to „pewniak", na którym zdający tracą najwięcej punktów. Polecenie: „Rozwiąż równanie … (w przedziale …). Zapisz obliczenia."

Punkty	Za co (drabinka jak w zasadach oceniania CKE 2024–2026)
1	zastosowanie właściwego wzoru: kąt podwojony, sinus lub cosinus sumy, suma sinusów, jedynka trygonometryczna
2	postać iloczynowa (wyłączony wspólny czynnik) albo równanie z jedną funkcją, np. kwadratowe z $t = \sin x$
3	alternatywa równań elementarnych (w zadaniu za 3 pkt – od razu komplet serii)
4	wszystkie serie w $\mathbb{R}$ albo rozwiązania jednego z równań w przedziale
5	komplet rozwiązań w przedziale – bez liczb spoza przedziału i bez zgubionych krańców

- **Równania elementarne** ($k \in \mathbb{Z}$). $\sin x = m$, gdzie $|m| \le 1$: $x = x_0 + 2k\pi$ lub $x = \pi - x_0 + 2k\pi$. $\cos x = m$: $x = x_0 + 2k\pi$ lub $x = -x_0 + 2k\pi$. $\operatorname{tg} x = m$: $x = x_0 + k\pi$. Tu x_0 to jedno rozwiązanie z tablicy. Gdy $|m| > 1$, równania z sinusem i cosinusem nie mają rozwiązań. Ogólniej: $\sin\alpha = \sin\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + 2k\pi$ lub $\alpha = \pi - \beta + 2k\pi$. Przy argumencie $ax + b$ najpierw zapisz serię dla argumentu, potem wyznacz x – dzielisz także okres.
- **Pięć metod.** 1) **Rozkład na czynniki** – wszystko na jedną stronę i wspólny czynnik; nie dziel przez $\sin x$ ani $\cos x$. 2) **Podstawienie** $t = \sin x$ (albo $\cos x$) z warunkiem $|t| \le 1$ – odrzuć t spoza przedziału $\langle -1, 1\rangle$. 3) **Jedna funkcja** – jedynka i $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$. 4) **Wzory na sumę i różnicę** (karta wzorów): $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ itd. zamieniają sumę na iloczyn. 5) **Równanie jednorodne** ($\sin^2 x$, $\sin x\cos x$, $\cos^2 x$) – uzasadnij, że $\cos x \neq 0$, i podziel przez $\cos^2 x$ albo przejdź na $\sin 2x$ i $\cos 2x$.
- **Rozwiązania w przedziale.** Zapisz serie w $\mathbb{R}$, podstaw kolejne k (także ujemne) i wypisz liczby z przedziału – sprawdź oba krańce. Gdy w równaniu jest $\sin 2x$ albo $\operatorname{tg} 3x$, argument przebiega dłuższy przedział: dla $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$ mamy $2x \in \langle 0, 4\pi\rangle$, więc rozwiązań jest dwa razy więcej. Dobrze jest zapisać je rosnąco i policzyć.

ZADANIA

Zadanie 1. Zapisz wszystkie rozwiązania równania ($k \in \mathbb{Z}$). ___ / 4 pkt

1. $\sin x = -\frac{1}{2}$: _____
2. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: _____
3. $\operatorname{tg} x = -1$: _____
4. $\sin 2x = 0$: _____

Zadanie 2. Równanie $\sin 2x = \frac{1}{2}$ ma w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ dokładnie ___ / 1 pkt

A. 1 rozwiązanie **B.** 4 rozwiązania

C. 8 rozwiązań **D.** 2 rozwiązania

Zadanie 3. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 3 pkt

1. Równanie $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ nie ma rozwiązań.	**P**	**F**
2. Każde rozwiązanie równania $\sin x = 0$ ma postać $x = 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.	**P**	**F**
3. Równania $\sin x \cos x = 0$ i $\sin 2x = 0$ mają te same rozwiązania.	**P**	**F**

Zadanie 4. Uzupełnij, korzystając z karty wzorów. ___ / 3 pkt

1. $\cos 2x = 1 -$ _____
2. $\sin 5x + \sin x =$ _____
3. $\cos x - \cos 3x =$ _____

PIERWSZA ŁAWKA

Zadanie 5. Rozwiąż równanie cos 3x + cos x = 0. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 6. Rozwiąż równanie tg 3x = −1 w przedziale (0, π). Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 7. Uczeń rozwiązał równanie sin 2x = sin x tak: 2sin $x$cos x = sin x, więc 2cos x = 1, czyli $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 3 pkt

1. Liczba π jest rozwiązaniem równania, a uczeń jej nie podał.	**P**	**F**
2. Uczeń mógł podzielić obie strony przez sin x, bo sin x występuje po obu stronach równania.	**P**	**F**
3. Wszystkie rozwiązania równania to $x = k\pi$ lub $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.	**P**	**F**

Podgląd • Pierwsza Ławka

Równania trygonometryczne – zadania trudniejsze

KARTA 4/6

Dla ambitnych – nietypowe ujęcia tego samego typu

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 21 pkt

Zadanie 1. Rozwiąż równanie $\cos 4x + \cos 2x = 0$. Zapisz obliczenia. ___ / 4 pkt

Zadanie 2. Rozwiąż równanie $\frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$. Zapisz obliczenia. ___ / 5 pkt

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $\cos 2x + 2\sin x = m$ ma co najmniej jedno rozwiązanie. Zapisz obliczenia. ___ / 4 pkt

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Matura 2027 z matematyki (poziom rozszerzony) – najczęstsze zadania: Równania trygonometryczne (karty pracy, test A i B, powtórka)

Podgląd pokazał 5 z 32 stron. Pełna wersja: 32 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Równania trygonometryczne – jak rozwiązywać i jak oceni to CKE – 4 zadania, 11 pkt
- Karta 2: Równania trygonometryczne – trening – 7 zadań, 18 pkt
- Karta 3: Równania trygonometryczne – zadania na poziomie matury – 6 zadań, 25 pkt
- Karta 4: Równania trygonometryczne – zadania trudniejsze – 5 zadań, 21 pkt
- Karta 5: Test: Równania trygonometryczne – grupa A – 5 zadań, 17 pkt
- Karta 6: Test: Równania trygonometryczne – grupa B – 5 zadań, 17 pkt Karta 1 pokazuje, jak CKE ocenia ten typ zadań (kamienie milowe i uwagi z zasad oceniania) oraz wzorcowe rozwią

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matura-2027-matematyka-rozszerzona-najczestsze-zadania-d-rownania-trygonometryc