PIERWSZA ŁAWKA · NAJCZĘSTSZE ZADANIA MATURALNE · PR · MATEMATYKA · MATURA 2027 · POZIOM ROZSZERZONY

H. Stereometria: kąty między ścianami, przekroje

Kąt między ścianami bocznymi (kąt liniowy kąta dwuściennego), kąt nachylenia ściany i krawędzi do podstawy, twierdzenie o trzech prostopadłych, ostrosłupy z krawędzią prostopadłą do podstawy, przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych, pola i objętości z trygonometrią – zadanie za 4–5 pkt w arkuszu rozszerzonym. Sześć kart: wzorcowe rozwiązania i zasady oceniania CKE, trening, zadania na poziomie matury, zadania trudniejsze i test w grupach A i B – z kluczem i schematami punktowania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Stereometria: kąty między ścianami, przekroje – jak rozwiązywać i jak oceni to CKE** Wzorcowe rozwiązania, pułapki, rozgrzewka	4 zad. 10 pkt
2	**Stereometria: kąty między ścianami, przekroje – trening** Zadania krok po kroku	7 zad. 19 pkt
3	**Stereometria: kąty między ścianami, przekroje – zadania na poziomie matury** Polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE 2025–2026	6 zad. 25 pkt
4	**Stereometria: kąty między ścianami, przekroje – zadania trudniejsze** Dla ambitnych – nietypowe ujęcia tego samego typu	5 zad. 23 pkt
5	**Test: Stereometria: kąty między ścianami, przekroje – grupa A** 60 minut · 17 pkt	5 zad. 17 pkt
6	**Test: Stereometria: kąty między ścianami, przekroje – grupa B** 60 minut · 17 pkt	5 zad. 17 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 pokazuje, jak CKE ocenia ten typ zadań (kamienie milowe, typowe uwagi w zasadach oceniania) oraz wzorcowe rozwiązania krok po kroku.
- Karty 2–4 prowadzą od treningu, przez zadania na poziomie matury, do zadań trudniejszych.
- Karty 5 i 6 to równoległy test (grupa A i B) z punktacją jak na maturze.
- Klucz zawiera odpowiedzi, przykładowe pełne rozwiązania i zasady oceniania w stylu CKE 2026.
- Osobny plik „Powtórka” zbiera wzory (z podziałem: są w karcie wzorów / trzeba pamiętać), typowe błędy z sprawozdań CKE i test „Sprawdź się”.

Stereometria: kąty między ścianami, przekroje – jak rozwiązywać i jak oceni to CKE

Wzorcowe rozwiązania, pułapki, rozgrzewka

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 10 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Gdzie w arkuszu.** Stereometria była w 3 z 4 arkuszy PR 2023–2026 (13 pkt): 2023 – sześcian, odcinek w bryle (4 pkt, 49%), 2025 – ostrosłup z krawędzią boczną prostopadłą do podstawy i kąt między ścianami bocznymi (5 pkt, **16%**), 2026 – ostrosłup prawidłowy trójkątny, cosinus kąta między ścianami bocznymi (4 pkt, 30%); w diagnozie 2022 – przekrój ostrosłupa („nazwij figurę, oblicz pole"). Na końcu arkusza bywa też „Wykaż, że objętość… jest określona wzorem…" z bryłą.
- **Kąt między ścianami (kąt dwuścienny).** Jego miarą jest **kąt liniowy**: z jednego punktu wspólnej krawędzi prowadzimy w obu ścianach odcinki prostopadłe do tej krawędzi. W ostrosłupie prawidłowym sąsiednie ściany boczne są przystające, więc wysokości opuszczone z wierzchołków podstawy na wspólną krawędź boczną mają wspólny spodek K – szukany kąt to np. $\sphericalangle AKC$, liczony z twierdzenia cosinusów. Wysokość ściany na krawędź boczną liczysz z pola: $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = \frac{1}{2} \cdot b \cdot |AK|$. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym ten kąt jest zawsze rozwarty (cosinus ujemny) – to nie błąd.
- **Kąt nachylenia ściany i krawędzi do podstawy.** Kąt krawędzi SA z podstawą to kąt między SA a jej rzutem prostokątnym OA (O – spodek wysokości). Kąt ściany z podstawą to kąt liniowy: odcinki prostopadłe do krawędzi podstawy w ścianie i w podstawie, np. $\sphericalangle SEO$ (E – środek krawędzi podstawy w ostrosłupie prawidłowym). **Twierdzenie o trzech prostopadłych** (jest w karcie wzorów): prosta leżąca w płaszczyźnie jest prostopadła do prostej nachylonej do tej płaszczyzny wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do jej rzutu prostokątnego.
- **Ostrosłup z krawędzią prostopadłą do podstawy** (nie jest prawidłowy!). Jeżeli $SA \perp$ podstawy $ABCD$ (prostokąt), to ściany SAB i SAD są prostokątne przy A, a z twierdzenia o trzech prostopadłych $SB \perp BC$ i $SD \perp CD$ – ściany SBC i SCD też są trójkątami prostokątnymi. Kąt ściany SBC z podstawą to $\sphericalangle SBA$. Ten fakt trzeba **zapisać i uzasadnić** – w 2025 r. wielu zdających przyjęło ostrosłup prawidłowy albo ściany równoramienne.
- **Przekroje (sześcian, ostrosłupy prawidłowe).** Płaszczyzna przecina dwie ściany równoległe wzdłuż prostych równoległych; jeśli krawędź jest równoległa do płaszczyzny przekroju, to ślad na sąsiedniej ścianie jest do niej równoległy (np. przekrój ostrosłupa przez krawędź AB i punkt krawędzi SC jest trapezem). Przekrojem sześcianu może być trójkąt, czworokąt (prostokąt, kwadrat, romb, trapez), pięciokąt albo sześciokąt – ale nie siedmiokąt. W odpowiedzi **nazwij figurę** (w zasadach 2022: brak nazwy – o 1 pkt mniej) i uzasadnij jej kształt.

Przykład 2. Podstawą ostrosłupa *ABCDS* jest kwadrat *ABCD* o boku 4, a krawędź *SA* jest wysokością ostrosłupa i ma długość $4\sqrt{3}$. Wyznacz kąt nachylenia ściany *BCS* do płaszczyzny podstawy i oblicz pole powierzchni bocznej.

$SA \perp$ podstawy, więc AB jest rzutem SB na podstawę. $BC \perp AB$, zatem z twierdzenia o trzech prostopadłych $BC \perp SB$. Kąt SBA ma oba ramiona prostopadłe do krawędzi BC – to kąt nachylenia ściany BCS: $\operatorname{tg} \sphericalangle SBA = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$, kąt ma 60°.

$|SB| = \sqrt{16 + 48} = 8$; tak samo $SD \perp CD$, $|SD| = 8$. Ściany: SAB, SAD – prostokątne przy A, SBC – przy B, SCD – przy D.

$P_b = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16\sqrt{3} + 32$.

Przykład 3. W sześcianie *ABCDEFGH* o krawędzi 6 (*E* nad *A*, *F* nad *B*, *G* nad *C*, *H* nad *D*) poprowadzono płaszczyznę przez wierzchołki *A*, *C*, *H*. Nazwij figurę, która jest przekrojem, oblicz jej pole i tangens kąta nachylenia płaszczyzny *ACH* do podstawy *ABCD*.

Boki przekroju AC, CH, HA są przekątnymi ścian, każdy ma długość $6\sqrt{2}$ – przekrój jest **trójkątem równobocznym**. Pole: $\frac{(6\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3}$.

O – środek AC. $DO \perp AC$ (przekątne kwadratu), $HD \perp$ podstawy, więc z twierdzenia o trzech prostopadłych $HO \perp AC$. Kąt HOD jest kątem nachylenia: $\operatorname{tg} \sphericalangle HOD = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Przykład 4. Wszystkie krawędzie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego *ABCDS* mają długość 8. Płaszczyzna przechodzi przez krawędź *AB* i środek *K* krawędzi *SC*. Wyznacz przekrój ostrosłupa tą płaszczyzną i oblicz jego pole.

$AB \parallel CD$, więc płaszczyzna przekroju przecina ścianę SCD wzdłuż prostej przez K równoległej do CD – przechodzi ona przez środek L krawędzi SD. Przekrój: **trapez** $ABKL$, $|KL| = \frac{1}{2}|CD| = 4$.

Ściany boczne są trójkątami równobocznymi o boku 8, więc $|AL| = |BK| = 4\sqrt{3}$ (wysokości) – trapez jest równoramienny.

Wysokość trapezu: $\sqrt{48 - 2^2} = 2\sqrt{11}$. Pole: $\frac{8+4}{2} \cdot 2\sqrt{11} = 12\sqrt{11}$.

Przykład 5. Ostrosłup prawidłowy trójkątny *ABCS* ma krawędź podstawy 6, a krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 45°. Oblicz cosinus kąta między ścianami bocznymi *ACS* i *BCS*.

O – środek podstawy: $|CO| = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$. Kąt 45°: $H = |CO| = 2\sqrt{3}$, $b = |CO|\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$.

Wysokość ściany BCS z S: $h_s = \sqrt{24 - 9} = \sqrt{15}$. Wysokość tej ściany z B na krawędź SC: $|BK| = \frac{6\sqrt{15}}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$; tak samo $|AK| = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

Twierdzenie cosinusów w trójkącie ABK: $36 = \frac{45}{2} + \frac{45}{2} - 2 \cdot \frac{45}{2}\cos\beta$, $\cos\beta = \frac{1}{5}$.

PIERWSZA ŁAWKA

ZADANIA

Zadanie 1. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym *ABCDS* punkt *O* jest środkiem podstawy, a *E* – środkiem krawędzi *BC*. Kątem nachylenia ściany bocznej *BCS* do płaszczyzny podstawy jest kąt ___ / 1 pkt

A. *BSC* **B.** *SBE* **C.** *SEO* **D.** *SBO*

Zadanie 2. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 3 pkt

1. Przekrojem sześcianu płaszczyzną może być sześciokąt foremny.	**P**	**F**
2. Przekrojem sześcianu płaszczyzną może być pięciokąt.	**P**	**F**
3. Przekrojem sześcianu płaszczyzną może być siedmiokąt.	**P**	**F**

Zadanie 3. Sześcian ma krawędź 5. Uzupełnij. ___ / 3 pkt

1. Przekątna ściany ma długość _____
2. Przekątna sześcianu ma długość _____
3. Tangens kąta nachylenia przekątnej sześcianu do płaszczyzny podstawy jest równy _____

Zadanie 4. Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma krawędź podstawy 6 i wysokość 4. Uzupełnij. ___ / 3 pkt

1. Wysokość ściany bocznej ma długość _____
2. Tangens kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy jest równy _____
3. Cosinus kąta 120° jest równy _____

Podgląd • Pierwsza Ławka

Stereometria: kąty między ścianami, przekroje – trening

Zadania krok po kroku

KARTA 2/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 19 pkt

Zadanie 1. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 10, a krawędź boczna – 13. Oblicz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 2. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 9, a krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°. Oblicz objętość tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 3. Przekrój sześcianu *ABCDEFGH* płaszczyzną zawierającą krawędzie *AD* i *FG* ma pole $49\sqrt{2}$. Oblicz objętość sześcianu i miarę kąta nachylenia płaszczyzny przekroju do płaszczyzny podstawy *ABCD*. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 4. W ostrosłupie *ABCS* krawędź *SA* jest prostopadła do płaszczyzny podstawy *ABC*, a kąt *ABC* jest prosty. Wykaż, że kąt *SBC* jest prosty. ___ / 2 pkt

Zadanie 5. Wszystkie krawędzie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego *ABCDS* mają długość *a*. Oblicz cosinus kąta między ścianami bocznymi *ABS* i *BCS*. Zapisz obliczenia.

___ / 3 pkt

Zadanie 6. Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma krawędź podstawy 12 i wysokość 9. Przecięto go płaszczyzną równoległą do podstawy, odległą od podstawy o 6. Oblicz pole przekroju i objętość odciętego ostrosłupa, który zawiera wierzchołek. Zapisz obliczenia.

___ / 3 pkt

Zadanie 7. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym *ABCDEF* (*D* nad *A*, *E* nad *B*, *F* nad *C*) krawędź podstawy ma długość 4, a wysokość – 3. Oblicz cosinus kąta *EAF* między przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z wierzchołka *A*. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Stereometria: kąty między ścianami, przekroje – zadania na poziomie matury

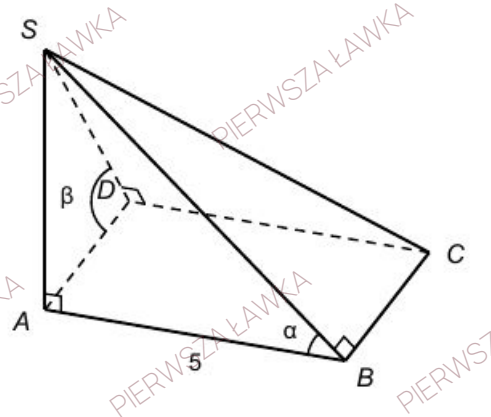
Polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE 2025–2026

KARTA 3/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 25 pkt

Zadanie 1. Podstawą ostrosłupa prawidłowego trójkątnego *ABCS* jest trójkąt o boku 6. Cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy $\frac{2\sqrt{3}}{5}$. Oblicz cosinus kąta między ścianami bocznymi *ACS* i *BCS*. Zapisz obliczenia. ___ / 4 pkt

Zadanie 2. Podstawą ostrosłupa *ABCDS* jest prostokąt *ABCD*, w którym |*AB*| = 5. Krawędź boczna *SA* jest wysokością ostrosłupa. Ściana *BCS* jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α, a ściana *CDS* – pod kątem β (zobacz rysunek). Wiadomo, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$ i $\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia. ___ / 5 pkt



Test: Stereometria: kąty między ścianami, przekroje – grupa A

60 minut · 17 pkt

KARTA 5/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 17 pkt

Zadanie 1. Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma krawędź podstawy 16 i wysokość 6. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 2. W sześcianie *ABCDEFGH* o krawędzi 8 (*E* nad *A*) punkt *M* jest środkiem krawędzi *AE*. Nazwij figurę, która jest przekrojem sześcianu płaszczyzną *BDM*, i oblicz jej pole. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 3. Podstawą ostrosłupa *ABCDS* jest prostokąt *ABCD*, a krawędź *SD* jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Wykaż, że kąt *SAB* jest prosty. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Test: Stereometria: kąty między ścianami, przekroje – grupa B

60 minut · 17 pkt

KARTA 6/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 17 pkt

Zadanie 1. Ostrosłup prawidłowy czworokątny ma krawędź podstawy 18 i wysokość 12. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 2. W sześcianie *ABCDEFGH* o krawędzi 6 (*H* nad *D*) punkt *M* jest środkiem krawędzi *DH*. Nazwij figurę, która jest przekrojem sześcianu płaszczyzną *ACM*, i oblicz jej pole. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 3. Podstawą ostrosłupa *ABCS* jest trójkąt *ABC*, w którym kąt *ACB* jest prosty, a krawędź *SB* jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Wykaż, że kąt *SCA* jest prosty. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Matura 2027 z matematyki (poziom rozszerzony) – najczęstsze zadania: Stereometria: kąty między ścianami, przekroje (karty pracy, test A i B, powtórka)

Podgląd pokazał 9 z 33 stron. Pełna wersja: 33 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Stereometria: kąty między ścianami, przekroje – jak rozwiązywać i jak oceni to CKE – 4 zadania, 10 pkt
- Karta 2: Stereometria: kąty między ścianami, przekroje – trening – 7 zadań, 19 pkt
- Karta 3: Stereometria: kąty między ścianami, przekroje – zadania na poziomie matury – 6 zadań, 25 pkt
- Karta 4: Stereometria: kąty między ścianami, przekroje – zadania trudniejsze – 5 zadań, 23 pkt
- Karta 5: Test: Stereometria: kąty między ścianami, przekroje – grupa A – 5 zadań, 17 pkt
- Karta 6: Test: Stereometria: kąty między ścianami, przekroje – grupa B – 5 zadań, 17 pkt Karta 1 pokazuje, jak CKE ocenia ten typ zadań (kamienie milowe i uwagi z zasad oceniania)

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matura-2027-matematyka-rozszerzona-najczestsze-zadania-h-stereometria-katy-miedz