PIERWSZA ŁAWKA · ZESTAW DZIAŁOWY · MATEMATYKA · KLASA 4 LO I TECHNIKUM · ZAKRES PODSTAWOWY

Dział 4. Bryły obrotowe i bryły podobne

Walec, stożek i kula: pola powierzchni i objętości, także z trygonometrią; kąt między tworzącą a podstawą, kąt rozwarcia stożka, kąt przekątnej prostokąta osiowego walca; rozwinięcie powierzchni bocznej; bryły powstałe z obrotu figur; bryły podobne – skala, stosunek pól i objętości. Dziewięć kart: teoria z przykładami, ćwiczenia, zadania typu maturalnego, dwie kartkówki (A i B) i sprawdzian (A i B) – z kluczem i zasadami oceniania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Bryły obrotowe i bryły podobne – najważniejsze wiadomości** Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka	4 zad. 9 pkt
2	**Bryły obrotowe i bryły podobne – ćwiczenia** Ćwiczę umiejętności z działu	8 zad. 24 pkt
3	**Bryły obrotowe i bryły podobne – zadania typu maturalnego** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	8 zad. 13 pkt
4	**Kartkówka 1: walec i stożek – grupa A** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
5	**Kartkówka 1: walec i stożek – grupa B** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
6	**Kartkówka 2: kula i bryły podobne – grupa A** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
7	**Kartkówka 2: kula i bryły podobne – grupa B** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
8	**Sprawdzian: Bryły obrotowe i bryły podobne – grupa A** 45 minut · 20 pkt	9 zad. 20 pkt
9	**Sprawdzian: Bryły obrotowe i bryły podobne – grupa B** 45 minut · 20 pkt	9 zad. 20 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 przypomina najważniejsze wiadomości z działu i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku – od niej warto zacząć.
- Karta 2 to ćwiczenia, a karta 3 – zadania w formule matury 2027 (polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE).
- Karty 4–7 to dwie kartkówki (po 15 minut), każda w grupach A i B. Karty 8–9 to sprawdzian (45 minut) w grupach A i B – te same typy zadań i ta sama punktacja, inne liczby.
- Klucz na końcu zestawu zawiera odpowiedzi, przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE (kamienie milowe, błąd rachunkowy = −1 pkt).
- Osobny plik „Powtórka” zbiera definicje, wzory (z zaznaczeniem, które są w karcie wzorów CKE), typowe błędy i test „Sprawdź się”.

Materiał oryginalny. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: X.4, X.5, X.6 (+ VII.4, VIII.6, VIII.9); cele ogólne III.1, III.2, IV.4; przekroje brył (X.R2, zakres rozszerzony) – nie występują. Miejsce w seriach podręczników: NE kl. 4 · Pazdro kl. 4 · GWO kl. 2; technikum NE kl. 5. Nazwy wydawnictw i serii podano tylko informacyjnie – materiał nie jest z nimi powiązany. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

Bryły obrotowe i bryły podobne – najważniejsze wiadomości

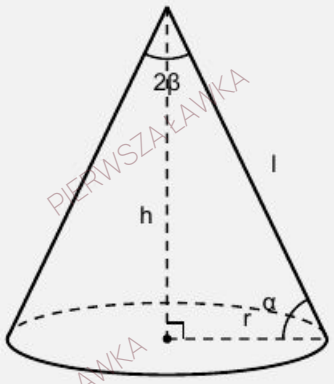
Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka

KARTA 1/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 9 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Walec** o promieniu podstawy r i wysokości h powstaje z obrotu prostokąta wokół boku. Prostokąt $ABCD$, w którym AB i CD są średnicami podstaw, ma wymiary $2r \times h$; jego przekątna AC tworzy z podstawą kąt α, dla którego $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2r}$. Powierzchnia boczna po rozwinięciu to prostokąt $2\pi r \times h$.
- **Stożek** o promieniu podstawy r, wysokości h i tworzącej l powstaje z obrotu trójkąta prostokątnego wokół przyprostokątnej. Trójkąt roboczy SOB (O – środek podstawy, S – wierzchołek) jest prostokątny: $l^2 = r^2 + h^2$. Kąt α między tworzącą a podstawą leży przy B: $\cos\alpha = \frac{r}{l}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{r}$.
- **Kąt rozwarcia stożka** to kąt ASB między dwiema tworzącymi, gdy AB jest średnicą podstawy. Trójkąt ABS jest równoramienny (nazywamy go przekrojem osiowym; wyznaczanie innych przekrojów brył to zakres rozszerzony). Wysokość SO dzieli kąt rozwarcia 2β na połowy: $\sin\beta = \frac{r}{l}$, a $\alpha + \beta = 90°$. Trójkąt ABS jest równoboczny tylko wtedy, gdy kąt rozwarcia ma 60°.

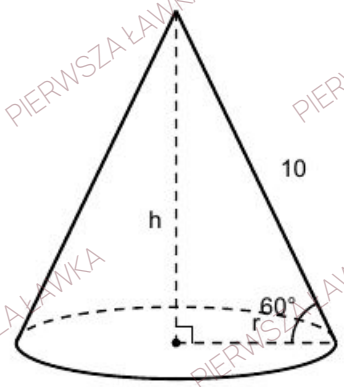


- **Wzory:** walec $V = \pi r^2 h$, $P_b = 2\pi rh$, $P_c = 2\pi r(r + h)$; stożek $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $P_b = \pi rl$, $P_c = \pi r(r + l)$; kula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $P = 4\pi r^2$. Wszystkie są w „Wybranych wzorach matematycznych" CKE.
- **Rozwinięcie powierzchni bocznej stożka** to wycinek koła o promieniu l. Długość jego łuku jest równa obwodowi podstawy: $\frac{\varphi}{360°} \cdot 2\pi l = 2\pi r$, czyli $\varphi = 360° \cdot \frac{r}{l}$ (VIII.6 – wycinek koła).

- **Bryły podobne.** Jeżeli bryła F_2 jest podobna do F_1 w skali k, to długości odcinków rosną k razy, pola powierzchni – k^2 razy, a objętości – k^3 razy: $\frac{V_2}{V_1} = k^3$. Z ilorazu objętości najpierw obliczamy k (pierwiastek trzeciego stopnia), potem k^2.
- Każde dwie kule są podobne (skala = iloraz promieni). Walce albo stożki są podobne wtedy, gdy iloraz promieni jest równy ilorazowi wysokości.
- W karcie wzorów CKE są wzory na pola i objętości walca, stożka i kuli. Nie ma tam związku $l^2 = r^2 + h^2$, definicji kąta rozwarcia ani zależności k^2 i k^3 dla brył podobnych – trzeba je pamiętać.

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. Tworząca stożka ma długość 10 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz objętość, pole powierzchni całkowitej i kąt rozwarcia stożka.

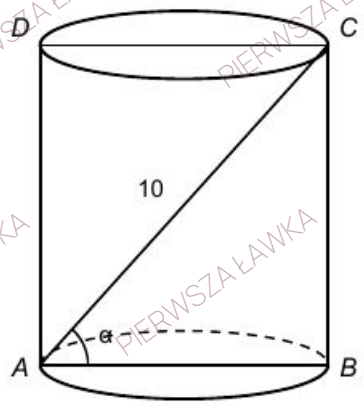


W trójkącie prostokątnym SOB: $r = 10\cos 60° = 5$, $h = 10\sin 60° = 5\sqrt{3}$.

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 25 \cdot 5\sqrt{3} = \frac{125\sqrt{3}}{3}\pi$, $P_c = \pi \cdot 5 \cdot (5 + 10) = 75\pi$.

Kąt rozwarcia: $180° - 2 \cdot 60° = 60°$ (trójkąt ABS jest równoboczny).

Przykład 2. Prostokąt *ABCD*, w którym *AB* i *CD* są średnicami podstaw walca, ma przekątną *AC* długości 10. Kąt α między przekątną *AC* a średnicą *AB* spełnia warunek $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej walca.



$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, więc $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ (trójkąt o bokach 3, 4, 5).

$2r = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6$, $h = 10 \cdot \frac{4}{5} = 8$, $r = 3$.

$V = \pi \cdot 9 \cdot 8 = 72\pi$, $P_c = 2\pi \cdot 3 \cdot (3 + 8) = 66\pi$.

Przykład 3. Pole powierzchni kuli jest równe 36π. Oblicz objętość tej kuli. Ile razy wzrośnie objętość kuli, gdy promień zwiększymy dwukrotnie?

$4\pi r^2 = 36\pi$, $r^2 = 9$, $r = 3$ ($r > 0$). $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 27 = 36\pi$.

Kula o dwa razy dłuższym promieniu jest podobna w skali $k = 2$, więc objętość wzrośnie $2^3 = 8$ razy.

Przykład 4. Stożki S_1 i S_2 są podobne. Stosunek objętości stożka S_2 do objętości stożka S_1 jest równy $\frac{27}{8}$. Pole powierzchni całkowitej stożka S_1 jest równe 20π. Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka S_2.

$k^3 = \frac{27}{8}$, więc $k = \frac{3}{2}$. Pola powierzchni rosną $k^2 = \frac{9}{4}$ razy: $P_2 = 20\pi \cdot \frac{9}{4} = 45\pi$.

Uwaga: pole nie rośnie $\frac{27}{8}$ razy ani $\frac{3}{2}$ razy – to najczęstszy błąd.

Przykład 5. Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest wycinkiem koła o promieniu 12. Promień podstawy stożka jest równy 4. Oblicz miarę kąta środkowego wycinka i objętość stożka.

$l = 12$, $\varphi = 360° \cdot \frac{4}{12} = 120°$.

$h = \sqrt{144 - 16} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$, $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 16 \cdot 8\sqrt{2} = \frac{128\sqrt{2}}{3}\pi$.

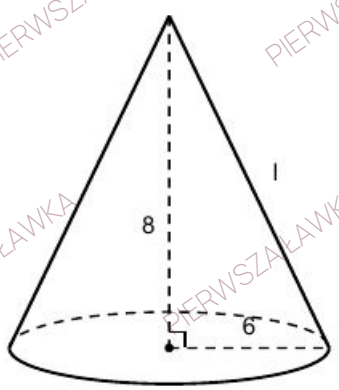
Podgląd • Pierwsza Ławka

ZADANIA

Zadanie 1. Walec ma promień podstawy 3 i wysokość 4. Oblicz. ___ / 3 pkt

1. objętość: _____
2. pole powierzchni bocznej: _____
3. pole powierzchni całkowitej: _____

Zadanie 2. Promień podstawy stożka ma długość 6, a wysokość – długość 8 (zobacz rysunek). Tworząca tego stożka ma długość ___ / 1 pkt



A. 14 **B.** 100 **C.** $2\sqrt{7}$ **D.** 10

Zadanie 3. Bryłę powiększono w skali 2. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 3 pkt

1. Pole powierzchni bryły wzrosło 4 razy.	**P**	**F**
2. Objętość bryły wzrosła 6 razy.	**P**	**F**
3. Każda krawędź (wysokość, promień) wzrosła 2 razy.	**P**	**F**

Zadanie 4. Kula ma promień 10. Oblicz. ___ / 2 pkt

1. pole powierzchni kuli: _____
2. objętość kuli: _____

Podgląd • Pierwsza Ławka

Bryły obrotowe i bryły podobne – ćwiczenia

KARTA 2/9

Ćwiczę umiejętności z działu

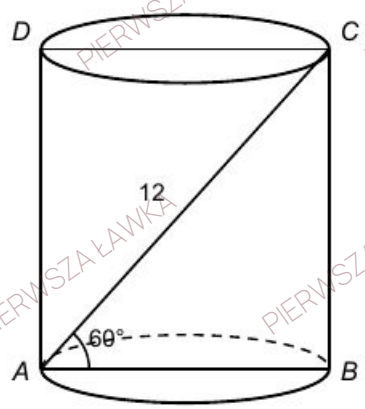
Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 24 pkt

Zadanie 1. Promień podstawy stożka ma długość 5, a tworząca – długość 13. Oblicz wysokość, objętość i pole powierzchni całkowitej stożka. ___ / 3 pkt

Zadanie 2. Promień podstawy stożka jest równy jego wysokości. Kąt rozwarcia tego stożka ma miarę ___ / 1 pkt

A. 60° **B.** 45° **C.** 90° **D.** 120°

Zadanie 3. Prostokąt *ABCD*, w którym *AB* i *CD* są średnicami podstaw walca, ma przekątną *AC* długości 12, nachyloną do średnicy *AB* pod kątem 60° (zobacz rysunek). Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej walca. ___ / 3 pkt



Zadanie 4. Dopasuj do każdej figury (1–4) bryłę (a–d), która powstaje z jej obrotu wokół wskazanej prostej. ___ / 4 pkt

1. prostokąt o bokach 3 i 5, obrót wokół boku długości 5
2. trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 3 i 4, obrót wokół przyprostokątnej długości 4
3. półkole o promieniu 3, obrót wokół średnicy
4. prostokąt o bokach 3 i 5, obrót wokół boku długości 3

a) walec o promieniu 5 i wysokości 3
b) kula o promieniu 3
c) stożek o promieniu 3 i wysokości 4
d) walec o promieniu 3 i wysokości 5

1 ____ 2 ____ 3 ____ 4 ____

Zadanie 5. Pole powierzchni kuli jest równe 100π. Oblicz objętość tej kuli. Ile razy wzrośnie objętość kuli, gdy jej promień zwiększymy trzykrotnie? ___ / 2 pkt

Zadanie 6. Bryły F_1 i F_2 są podobne. Uzupełnij. ___ / 4 pkt

1. skala $k = 2$: stosunek pól powierzchni F_2 do F_1 jest równy _____
2. skala $k = 2$: stosunek objętości F_2 do F_1 jest równy _____
3. stosunek objętości jest równy 64, więc stosunek pól powierzchni jest równy _____
4. stosunek pól powierzchni jest równy 9, więc stosunek objętości jest równy _____

Podgląd • Pierwsza Ławka

Kartkówka 1: walec i stożek – grupa A

15 minut · 8 pkt

KARTA 4/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

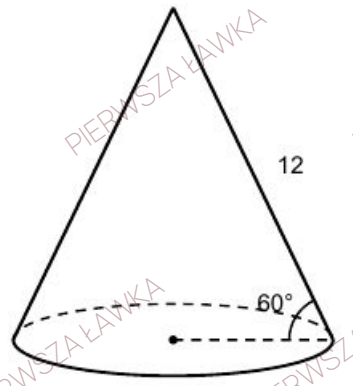
Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. Objętość walca o promieniu podstawy 5 i wysokości 2 jest równa ___ / 1 pkt

A. 10π **B.** 20π **C.** 50π **D.** 100π

Zadanie 2. Promień podstawy stożka ma długość 9, a wysokość stożka – długość 12. Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe. ___ / 2 pkt

1. Tworząca stożka ma długość _____ .
2. Pole powierzchni bocznej stożka jest równe _____ .

Zadanie 3. Tworząca stożka ma długość 12 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° (zobacz rysunek). Oblicz objętość stożka i miarę jego kąta rozwarcia. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt



Sprawdzian: Bryły obrotowe i bryły podobne – grupa A

KARTA 8/9

45 minut · 20 pkt

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 20 pkt

Zadanie 1. Promień podstawy walca ma długość 3, a pole powierzchni bocznej walca jest równe 30π.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Objętość tego walca jest równa ___ / 1 pkt

A. 45π **B.** 30π **C.** 90π **D.** 15π

Zadanie 2. Promień podstawy stożka ma długość 7, a wysokość – długość 24.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Pole powierzchni bocznej tego stożka jest równe ___ / 1 pkt

A. 168π **B.** 224π **C.** 49π **D.** 175π

Zadanie 3. Promień podstawy stożka ma długość 3, a tworząca – długość 6.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Kąt rozwarcia tego stożka ma miarę ___ / 1 pkt

A. 45° **B.** 60° **C.** 30° **D.** 120°

Zadanie 4. Kula ma promień 12.
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Pole powierzchni tej kuli jest równe 576π.	**P**	**F**
2. Objętość tej kuli jest równa 576π.	**P**	**F**

Zadanie 5. Walec W_2 jest podobny do walca W_1, a objętość walca W_2 jest 64 razy większa od objętości walca W_1.
Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe. ___ / 2 pkt

1. Skala podobieństwa walca W_2 do walca W_1 jest równa _____ .
2. Pole powierzchni całkowitej walca W_2 jest _____ razy większe od pola powierzchni całkowitej walca W_1.

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Bryły obrotowe i bryły podobne – kartkówki, sprawdzian i karty pracy z powtórką, matematyka, klasa 4 LO i technikum (zakres podstawowy)

Podgląd pokazał 10 z 33 stron. Pełna wersja: 33 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Bryły obrotowe i bryły podobne – najważniejsze wiadomości – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 2: Bryły obrotowe i bryły podobne – ćwiczenia – 8 zadań, 24 pkt
- Karta 3: Bryły obrotowe i bryły podobne – zadania typu maturalnego – 8 zadań, 13 pkt
- Karta 4: Kartkówka 1: walec i stożek – grupa A – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 5: Kartkówka 1: walec i stożek – grupa B – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 6: Kartkówka 2: kula i bryły podobne – grupa A – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 7: Kartkówka 2: kula i bryły podobne – grupa B – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 8: Sprawdzian: Bryły obrotowe i bryły podobne – grupa A – 9 zadań, 20 pkt
- Karta 9: Sprawdzian: Bryły obrotowe i bryły podobne – grupa B – 9 zadań, 20 pkt Karta 1 przypomina teorię i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku.

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail
pierwszalawka.pl/material/matematyka-liceum-klasa-4-dzial-04-bryly-obrotowe-i-bryly-podobne