PIERWSZA ŁAWKA · ZESTAW DZIAŁOWY · MATEMATYKA · KLASA 2 LO I TECHNIKUM · ZAKRES PODSTAWOWY

Dział 5. Trygonometria

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego i kątów od 0° do 180° (także z punktu na ramieniu kąta w układzie współrzędnych), wartości dla 30°, 45°, 60° i kątów rozwartych, związki $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i $\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$, rozwiązywanie trójkątów prostokątnych, odczyt z tablic. Dziewięć kart: teoria z przykładami, ćwiczenia, zadania typu maturalnego, dwie kartkówki (A i B) i sprawdzian (A i B) – z kluczem i zasadami oceniania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Trygonometria – najważniejsze wiadomości** Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka	3 zad. 10 pkt
2	**Trygonometria – ćwiczenia** Ćwiczę umiejętności z działu	7 zad. 22 pkt
3	**Trygonometria – zadania typu maturalnego** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	8 zad. 12 pkt
4	**Kartkówka 1: funkcje trygonometryczne kątów od 0° do 180° – grupa A** 15 minut · 10 pkt	4 zad. 10 pkt
5	**Kartkówka 1: funkcje trygonometryczne kątów od 0° do 180° – grupa B** 15 minut · 10 pkt	4 zad. 10 pkt
6	**Kartkówka 2: trójkąty prostokątne i tożsamości – grupa A** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
7	**Kartkówka 2: trójkąty prostokątne i tożsamości – grupa B** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
8	**Sprawdzian: Trygonometria – grupa A** 45 minut · 20 pkt	10 zad. 20 pkt
9	**Sprawdzian: Trygonometria – grupa B** 45 minut · 20 pkt	10 zad. 20 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 przypomina najważniejsze wiadomości z działu i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku – od niej warto zacząć.

- Karta 2 to ćwiczenia, a karta 3 – zadania w formule matury 2027 (polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE).
- Karty 4–7 to dwie kartkówki (po 15 minut), każda w grupach A i B. Karty 8–9 to sprawdzian (45 minut) w grupach A i B – te same typy zadań i ta sama punktacja, inne liczby.
- Klucz na końcu zestawu zawiera odpowiedzi, przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE (kamienie milowe, błąd rachunkowy = −1 pkt).
- Osobny plik „Powtórka” zbiera definicje, wzory (z zaznaczeniem, które są w karcie wzorów CKE), typowe błędy i test „Sprawdź się”.

Materiał oryginalny. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: VII.1, VII.2, VII.4; VIII.12 (zastosowania); warunki realizacji pkt 11 (tablice i kalkulator); cele ogólne I, III.1, IV.1; VII.3 – w dziale 7. Miejsce w seriach podręczników: NE kl. 2 Pazdro kl. 1 (kąt ostry) i kl. 2 GWO kl. 2; technikum NE kl. 3. Nazwy wydawnictw i serii podano tylko informacyjnie – materiał nie jest z nimi powiązany. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

Trygonometria – najważniejsze wiadomości

Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka

KARTA 1/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 10 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Kąt ostry w trójkącie prostokątnym.** Dla kąta ostrego α: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ (przyprostokątna leżąca naprzeciw kąta α przez przeciwprostokątną), $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ (przyprostokątna przyległa do kąta α przez przeciwprostokątną), $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$. Przeciwprostokątna jest najdłuższym bokiem, więc dla kąta ostrego $0 < \sin\alpha < 1$ i $0 < \cos\alpha < 1$.
- **Kąty od 0° do 180°.** Kąt α ma wierzchołek w punkcie (0, 0), jedno ramię na dodatniej półosi *Ox*, a drugie ramię przechodzi przez punkt $P = (x, y)$ różny od (0, 0). Wtedy $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ oraz $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ (dla $x \neq 0$ – tangens kąta 90° nie istnieje). Dla kąta rozwartego: $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

- **Kąty α i 180° − α.** Punkt $(-x, y)$ jest symetryczny do punktu (x, y) względem osi *Oy*, dlatego $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$. Przykład: $\sin 120° = \sin 60°$, $\cos 150° = -\cos 30°$. (Ogólne wzory redukcyjne to zakres rozszerzony.)
- **Związki między funkcjami tego samego kąta:** $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (dla $\cos\alpha \neq 0$). Znając jedną funkcję i rodzaj kąta, obliczamy pozostałe – znak cosinusa i tangensa zależy od tego, czy kąt jest ostry, czy rozwarty. Dla kąta ostrego zachodzi też $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$.
- **Rozwiązywanie trójkąta prostokątnego:** wybierz funkcję, która łączy daną i szukaną wielkość (np. przyprostokątna przyległa i przeciwprostokątna – cosinus). „Ekierki”: w trójkącie o kątach 30°, 60°, 90° boki mają długości a, $a\sqrt{3}$, $2a$ (połowa trójkąta równobocznego), w trójkącie o kątach 45°, 45°, 90° – a, a, $a\sqrt{2}$ (połowa kwadratu).
- **Tablice i kalkulator.** Wartości dla innych kątów odczytujemy z tablicy (jest w „Wybranych wzorach matematycznych”, 4 miejsca po przecinku) albo z kalkulatora naukowego. Kąt z wartości funkcji: szukamy w tablicy wartości najbliższej danej, np. $\sin\alpha = 0{,}6$, a $\sin 37° \approx 0{,}6018$, więc $\alpha \approx 37°$. Na maturze masz kalkulator prosty – wartości bierzesz z tablicy.

- W karcie wzorów CKE są: definicje funkcji (w trójkącie prostokątnym i dla dowolnego kąta), $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, wartości dla 0°, 30°, 45°, 60°, 90° i tablica wartości funkcji dla kątów od 0° do 90°. Wartości dla kątów rozwartych wyznaczasz sam.

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. Kąt α ma wierzchołek w punkcie (0, 0), jedno ramię na dodatniej półosi *Ox*, a drugie ramię przechodzi przez punkt *P* = (−5, 12). Oblicz sin α, cos α i tg α. Czy kąt α jest ostry?

$r = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$.

$\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{-5}{13} = -\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{-5} = -\frac{12}{5}$.

Cosinus jest ujemny, więc kąt α jest rozwarty (punkt *P* leży w II ćwiartce układu).

Przykład 2. Kąt α jest rozwarty i $\sin\alpha = \frac{2}{3}$. Oblicz cos α i tg α.

Z jedynki trygonometrycznej: $\cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$, więc $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ albo $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Kąt jest rozwarty, więc $\cos\alpha < 0$, czyli $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{3} : \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Przykład 3. Kąt α jest ostry i tg α = 3. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$.

Sposób I: dzielimy licznik i mianownik przez $\cos\alpha \neq 0$ i korzystamy z równości $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$:

$\frac{2\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{tg}\alpha - 1} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3 - 1} = \frac{7}{2}$.

Sposób II: $\sin\alpha = 3\cos\alpha$, więc wyrażenie jest równe $\frac{6\cos\alpha + \cos\alpha}{3\cos\alpha - \cos\alpha} = \frac{7\cos\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{7}{2}$.

Przykład 4. W trójkącie prostokątnym *ABC* kąt przy wierzchołku *C* jest prosty, $|AC| = 12$, a tangens kąta *BAC* jest równy $\frac{3}{4}$. Oblicz długości pozostałych boków i sinus kąta *BAC*.

Tangens kąta przy wierzchołku *A*: $\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{3}{4}$, więc $|BC| = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9$.

Z twierdzenia Pitagorasa: $|AB| = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$.

$\sin\sphericalangle BAC = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

Przykład 5. Drabinę o długości 5 m oparto o pionową ścianę tak, że tworzy z poziomym podłożem kąt 70°. Na jakiej wysokości drabina dotyka ściany? Skorzystaj z przybliżenia sin 70° ≈ 0,9397.

Drabina jest przeciwprostokątną, a szukana wysokość – przyprostokątną leżącą naprzeciw kąta 70°:

$h = 5 \cdot \sin 70° \approx 5 \cdot 0{,}9397 \approx 4{,}70$ (m). Drabina dotyka ściany na wysokości około 4,7 m.

Podgląd • Pierwsza Ławka

Trygonometria – ćwiczenia

Ćwiczę umiejętności z działu

KARTA 2/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 22 pkt

Zadanie 1. Kąt α ma wierzchołek w punkcie $O = (0, 0)$, jedno ramię na dodatniej półosi Ox, a drugie przechodzi przez punkt $P = (-2, 2\sqrt{3})$ (zobacz rysunek). Uzupełnij. ___ / 5 pkt



1. $|OP|$ = _____
2. sin α = _____
3. cos α = _____
4. tg α = _____
5. Miara kąta: α = _____

Zadanie 2. Dopasuj do każdego kąta (1–4) wartość jego cosinusa (a–e). Jedna wartość nie pasuje do żadnego kąta. ___ / 4 pkt

1. 30°
2. 135°
3. 90°
4. 120°

a) $-\frac{1}{2}$

b) 0

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\frac{1}{2}$

1 ____ 2 ____ 3 ____ 4 ____

Zadanie 3. Kąt α jest ostry i tg α = 2. Oblicz sin α i cos α. ___ / 3 pkt

Zadanie 4. Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 12, a jeden z jego kątów ostrych ma miarę 60°. Oblicz długości przyprostokątnych, obwód i pole tego trójkąta.

___ / 3 pkt

Zadanie 5. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

___ / 3 pkt

1. Istnieje kąt α, dla którego $\sin\alpha = 0{,}6$ i $\cos\alpha = 0{,}7$.	**P**	**F**
2. Dla każdego kąta ostrego α zachodzi równość $\cos^2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha \cdot \cos\alpha$.	**P**	**F**
3. $\sin 40° = \cos 50°$	**P**	**F**

Zadanie 6. Rampa dla wózków ma długość 6 m (mierzoną wzdłuż rampy) i wznosi się na wysokość 0,9 m. Oblicz sinus kąta nachylenia rampy do poziomu i odczytaj ten kąt z tablicy z dokładnością do 1°. Wartości z tablicy: $\sin 8° \approx 0{,}1392$, $\sin 9° \approx 0{,}1564$.

___ / 2 pkt

Zadanie 7. Wykaż, że dla każdego kąta ostrego α prawdziwa jest równość $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$.

___ / 2 pkt

Trygonometria – zadania typu maturalnego

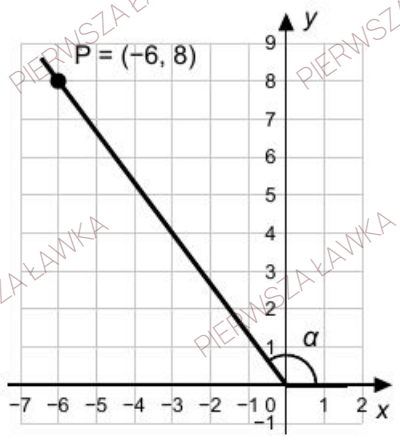
KARTA 3/9

Polecenia i punktacja jak na maturze 2027

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 12 pkt

Zadanie 1. Kąt α ma wierzchołek w punkcie $O = (0, 0)$. Jedno ramię kąta pokrywa się z dodatnią półosią Ox, a drugie przechodzi przez punkt $P = (-6, 8)$ (zobacz rysunek).
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Cosinus kąta α jest równy

___ / 1 pkt



A. $-\frac{4}{5}$ **B.** $-\frac{3}{5}$ **C.** $-\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{3}{5}$

Zadanie 2. Kąt α jest rozwarty i $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Tangens kąta α jest równy

___ / 1 pkt

A. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **C.** $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ **D.** $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

Zadanie 3. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Dla każdego kąta ostrego α wartość wyrażenia $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha) - \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$ jest równa

___ / 1 pkt

A. 1 **B.** $2\sin^2\alpha$ **C.** $\cos^2\alpha$ **D.** 0

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 4. W trójkącie prostokątnym *ABC* kąt przy wierzchołku *C* jest prosty, |*BC*| = 7 i |*AB*| = 25 (zobacz rysunek).
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Sinus kąta *ABC* jest równy

___ / 1 pkt



A. $\frac{24}{25}$ **B.** $\frac{24}{7}$ **C.** $\frac{7}{25}$ **D.** $\frac{7}{24}$

Zadanie 5. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

___ / 1 pkt

1. sin 150° = cos 60°	**P**	**F**
2. tg 120° = tg 60°	**P**	**F**

Zadanie 6. Drabina o długości 4 m jest oparta o pionową ścianę i tworzy z poziomym podłożem kąt 60°.
Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

___ / 2 pkt

1. Dolny koniec drabiny jest odległy od ściany o _____ m.
2. Górny koniec drabiny znajduje się na wysokości _____ m.

Zadanie 7. Kąt α jest ostry i tg α = $\frac{1}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia sin α · cos α. Zapisz obliczenia.

___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Kartkówka 1: funkcje trygonometryczne kątów od 0° do 180° – grupa A

15 minut · 10 pkt

KARTA 4/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 10 pkt

Zadanie 1. Uzupełnij. ___ / 4 pkt

1. $\sin 150° =$ _____
2. $\cos 120° =$ _____
3. $\operatorname{tg} 45° =$ _____
4. $\operatorname{tg} 150° =$ _____

Zadanie 2. Kąt α ma wierzchołek w punkcie (0, 0), jedno ramię na dodatniej półosi *Ox*, a drugie przechodzi przez punkt *P* = (−12, 5).
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Sinus kąta α jest równy ___ / 1 pkt

A. $-\frac{5}{12}$ **B.** $\frac{5}{13}$ **C.** $-\frac{12}{13}$ **D.** $\frac{12}{13}$

Zadanie 3. Kąt α jest rozwarty i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Oblicz cos α i tg α. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 4. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 2 pkt

1. $\sin 110° > 0$	**P**	**F**
2. $\cos 170° > 0$	**P**	**F**

PIERWSZA ŁAWKA

Sprawdzian: Trygonometria – grupa A

45 minut · 20 pkt

KARTA 8/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 20 pkt

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wartość wyrażenia $\sin 60° \cdot \cos 30° - \operatorname{tg} 45°$ jest równa

___ / 1 pkt

A. $-\frac{3}{4}$ **B.** $-\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{2}$

Zadanie 2. Kąt α ma wierzchołek w punkcie (0, 0), jedno ramię na dodatniej półosi *Ox*, a drugie przechodzi przez punkt $P = (-7, 24)$.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Tangens kąta α jest równy

___ / 1 pkt

A. $\frac{24}{7}$ **B.** $-\frac{24}{25}$ **C.** $-\frac{24}{7}$ **D.** $-\frac{7}{24}$

Zadanie 3. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Dla każdego kąta ostrego α wyrażenie $\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$ jest równe

___ / 1 pkt

A. $\operatorname{tg}\alpha$ **B.** $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ **C.** $\sin\alpha$ **D.** 1

Zadanie 4. Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = 0{,}28$.
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

___ / 1 pkt

1. $\sin\alpha = 0{,}96$	**P**	**F**
2. $\operatorname{tg}\alpha < 1$	**P**	**F**

Zadanie 5. W trójkącie prostokątnym *ABC* kąt przy wierzchołku *C* jest prosty, $|AB| = 16$, a kąt *BAC* ma miarę 60°.
Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

___ / 3 pkt

1. Bok *AC* ma długość _____ .
2. Bok *BC* ma długość _____ .
3. Pole trójkąta *ABC* jest równe _____ .

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Trygonometria – kartkówki, sprawdzian i karty pracy z powtórką, matematyka, klasa 2 LO i technikum (zakres podstawowy)

Podgląd pokazał 10 z 31 stron. Pełna wersja: 31 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Trygonometria – najważniejsze wiadomości – 3 zadania, 10 pkt
- Karta 2: Trygonometria – ćwiczenia – 7 zadań, 22 pkt
- Karta 3: Trygonometria – zadania typu maturalnego – 8 zadań, 12 pkt
- Karta 4: Kartkówka 1: funkcje trygonometryczne kątów od 0° do 180° – grupa A – 4 zadania, 10 pkt
- Karta 5: Kartkówka 1: funkcje trygonometryczne kątów od 0° do 180° – grupa B – 4 zadania, 10 pkt
- Karta 6: Kartkówka 2: trójkąty prostokątne i tożsamości – grupa A – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 7: Kartkówka 2: trójkąty prostokątne i tożsamości – grupa B – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 8: Sprawdzian: Trygonometria – grupa A – 10 zadań, 20 pkt
- Karta 9: Sprawdzian: Trygonometria – grupa B – 10 zadań, 20 pkt Karta 1 przypomina teorię i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku.

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail
pierwszalawka.pl/material/matematyka-liceum-klasa-2-dzial-05-trygonometria