PIERWSZA ŁAWKA · ZESTAW DZIAŁOWY · MATEMATYKA · KLASA 3 LO I TECHNIKUM · ZAKRES PODSTAWOWY

Dział 4. Ciąg geometryczny, procent składany, lokaty i kredyty

Ciąg geometryczny: iloraz, wzór na n-ty wyraz i sumę, monotoniczność, trzy kolejne wyrazy (średnia geometryczna), ciągi arytmetyczny i geometryczny w jednym zadaniu, procent składany jako ciąg geometryczny, lokaty z kapitalizacją roczną, półroczną i kwartalną, koszt kredytu spłacanego ratami malejącymi. Dziewięć kart: teoria z przykładami, ćwiczenia, zadania typu maturalnego, dwie kartkówki (A i B) i sprawdzian (A i B) – z kluczem i zasadami oceniania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Ciąg geometryczny, procent składany, lokaty i kredyty – najważniejsze wiadomości** Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka	3 zad. 8 pkt
2	**Ciąg geometryczny, procent składany, lokaty i kredyty – ćwiczenia** Ćwiczę umiejętności z działu	8 zad. 21 pkt
3	**Ciąg geometryczny, procent składany, lokaty i kredyty – zadania typu maturalnego** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	8 zad. 16 pkt
4	**Kartkówka 1: ciąg geometryczny – grupa A** 15 minut · 9 pkt	4 zad. 9 pkt
5	**Kartkówka 1: ciąg geometryczny – grupa B** 15 minut · 9 pkt	4 zad. 9 pkt
6	**Kartkówka 2: lokaty i kredyty – grupa A** 15 minut · 9 pkt	4 zad. 9 pkt
7	**Kartkówka 2: lokaty i kredyty – grupa B** 15 minut · 9 pkt	4 zad. 9 pkt
8	**Sprawdzian: Ciąg geometryczny, procent składany, lokaty i kredyty – grupa A** 45 minut · 20 pkt	10 zad. 20 pkt
9	**Sprawdzian: Ciąg geometryczny, procent składany, lokaty i kredyty – grupa B** 45 minut · 20 pkt	10 zad. 20 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 przypomina najważniejsze wiadomości z działu i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku – od niej warto zacząć.
- Karta 2 to ćwiczenia, a karta 3 – zadania w formule matury 2027 (polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE).
- Karty 4–7 to dwie kartkówki (po 15 minut), każda w grupach A i B. Karty 8–9 to sprawdzian (45 minut) w grupach A i B – te same typy zadań i ta sama punktacja, inne liczby.
- Klucz na końcu zestawu zawiera odpowiedzi, przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE (kamienie milowe, błąd rachunkowy = −1 pkt).
- Osobny plik „Powtórka" zbiera definicje, wzory (z zaznaczeniem, które są w karcie wzorów CKE), typowe błędy i test „Sprawdź się".

Materiał oryginalny. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: VI.4, VI.6, VI.7, I.8 (w tle VI.3, VI.5); cele ogólne I, III.2, IV.1; dowody PP pkt 5. Miejsce w seriach podręczników: NE kl. 3 · Pazdro kl. 3 · GWO kl. 3 · technikum NE kl. 4 (procent składany wstępnie w kl. 1, dział „Liczby rzeczywiste"). Nazwy wydawnictw i serii podano tylko informacyjnie – materiał nie jest z nimi powiązany. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

PIERWSZA ŁAWKA

Ciąg geometryczny, procent składany, lokaty i kredyty – najważniejsze wiadomości

Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka

KARTA 1/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Ciąg geometryczny** – każdy wyraz (od drugiego) powstaje z poprzedniego przez pomnożenie przez tę samą liczbę q (**iloraz**): $a_{n+1} = a_n \cdot q$. Wzór na n-ty wyraz: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$; ogólniej $a_n = a_k \cdot q^{n-k}$. Gdy wyrazy są różne od zera, $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ – tak sprawdzamy, czy ciąg jest geometryczny (iloraz kolejnych wyrazów musi być stały), np. 3, 6, 12, 24: $q = 2$.
- **Trzy kolejne wyrazy** x, y, z ciągu geometrycznego spełniają warunek $y^2 = x \cdot z$. Dla liczb dodatnich $y = \sqrt{x \cdot z}$ – to **średnia geometryczna** liczb x i z. Równanie $y^2 = xz$ ma zwykle dwa rozwiązania – drugie daje ciąg o ujemnym ilorazie.
- **Suma n początkowych wyrazów:** $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ dla $q \neq 1$ oraz $S_n = n \cdot a_1$ dla $q = 1$. Przykład: $5 + 15 + 45 + 135 = 5 \cdot \frac{1-3^4}{1-3} = 200$. Suma nieskończenie wielu wyrazów (szereg geometryczny) to zakres rozszerzony.
- **Monotoniczność ciągu geometrycznego:** $a_1 > 0$ i $q > 1$ – rosnący; $a_1 > 0$ i $0 < q < 1$ – malejący; dla $a_1 < 0$ – odwrotnie; $q < 0$ – znaki wyrazów na przemian, ciąg nie jest monotoniczny; $q = 1$ – stały. Ciąg stały (np. 7, 7, 7) jest jednocześnie arytmetyczny ($r = 0$) i geometryczny ($q = 1$).
- **Procent składany.** Kapitał K_0 na lokacie oprocentowanej p% w skali roku, z roczną kapitalizacją odsetek, po n latach: $K_n = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$ – kwoty po kolejnych latach tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $q = 1 + \frac{p}{100}$. **Kapitalizacja częstsza** (m razy w roku): w jednym okresie oprocentowanie wynosi $\frac{p}{m}$%, a okresów jest $m \cdot n$, np. 6% w skali roku, kapitalizacja kwartalna: 1,015 na kwartał.
- **Odsetki** to różnica $K_n - K_0$. Podatek od odsetek (19%) uwzględniamy tylko wtedy, gdy każe tak treść zadania. Przy kapitalizacji częstszej niż roczna (ta sama stopa w skali roku) odsetki są większe, bo odsetki wcześniej zaczynają „pracować”.
- **Kredyt – proste modele.** Raty malejące: co miesiąc spłacamy tę samą część kredytu (kapitał) i odsetki od długu pozostałego przed wpłatą – odsetki, a więc i raty, tworzą malejący ciąg arytmetyczny. Spłata jednorazowa po n latach: $K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$. **Koszt kredytu** = suma wszystkich wpłat − kwota kredytu (tu: suma odsetek).

- **Karta wzorów CKE** (dział „Ciągi”) zawiera: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, wzory na S_n, $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ i wzór na procent składany (roczna kapitalizacja). Kapitalizacji w podokresach, kosztu kredytu i monotoniczności ciągu geometrycznego w karcie nie ma.

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. W ciągu geometrycznym $a_2 = 6$ i $a_5 = -48$. Oblicz iloraz, a_7 i sumę sześciu początkowych wyrazów.

$a_5 = a_2 \cdot q^3$, więc $q^3 = \frac{-48}{6} = -8$, $q = -2$. Stąd $a_1 = \frac{a_2}{q} = -3$.

$a_7 = -3 \cdot (-2)^6 = -192$. $S_6 = -3 \cdot \frac{1-(-2)^6}{1-(-2)} = -3 \cdot \frac{-63}{3} = 63$.

Przykład 2. Wyznacz wszystkie liczby x, dla których ciąg $(x, x+4, 9x)$ jest geometryczny.

Warunek: $(x+4)^2 = x \cdot 9x$, czyli $(x+4)^2 = (3x)^2$. Stąd $x + 4 = 3x$ albo $x + 4 = -3x$, czyli $x = 2$ albo $x = -1$.

Sprawdzenie: $(2, 6, 18)$ – $q = 3$; $(-1, 3, -9)$ – $q = -3$. Oba ciągi są geometryczne – nie gubimy drugiego rozwiązania.

Przykład 3. Ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny, a $a + b + c = 15$. Ciąg $(a, b+1, c+10)$ jest geometryczny. Wyznacz a, b, c.

Z ciągu arytmetycznego: $a + c = 2b$, więc $3b = 15$, $b = 5$; $a = 5 - r$, $c = 5 + r$.

Z ciągu geometrycznego: $(b+1)^2 = a(c+10)$, czyli $36 = (5-r)(15+r)$, $r^2 + 10r - 39 = 0$, $(r-3)(r+13) = 0$.

$r = 3$: $(2, 5, 8)$ i $(2, 6, 18)$; $r = -13$: $(18, 5, -8)$ i $(18, 6, 2)$. Są dwa rozwiązania.

Przykład 4. Kwotę 8000 zł wpłacono na lokatę roczną oprocentowaną 6% w skali roku. Oblicz kwotę po roku przy kapitalizacji kwartalnej i przy kapitalizacji rocznej.

Kapitalizacja kwartalna: 4 okresy po $\frac{6\%}{4} = 1{,}5\%$.

$K = 8000 \cdot 1{,}015^4 = 8000 \cdot 1{,}061\,363\,550\,625 \approx 8490{,}91$ zł.

Kapitalizacja roczna: $8000 \cdot 1{,}06 = 8480$ zł. Kapitalizacja kwartalna daje o 10,91 zł więcej.

Przykład 5. Kredyt 12 000 zł spłacono w 12 ratach miesięcznych. Każda rata to 1000 zł kapitału i odsetki równe 1% długu pozostałego przed wpłatą tej raty. Oblicz pierwszą i ostatnią ratę oraz koszt kredytu.

Odsetki w k-tym miesiącu: $1\% \cdot (12\,000 - 1000(k-1)) = 130 - 10k$ – maleją o 10 zł. Raty: $a_1 = 1120$, $a_2 = 1110$, …, $a_{12} = 1010$ zł (ciąg arytmetyczny, $r = -10$).

Suma rat: $\frac{1120 + 1010}{2} \cdot 12 = 12\,780$ zł. Koszt kredytu: $12\,780 - 12\,000 = 780$ zł. (Dla porównania: spłata jednorazowa po roku przy 12% w skali roku to 13 440 zł, koszt 1440 zł.)

Podgląd • Pierwsza Ławka

Ciąg geometryczny, procent składany, lokaty i kredyty – ćwiczenia

Ćwiczę umiejętności z działu

KARTA 2/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 21 pkt

Zadanie 1. W ciągu geometrycznym (a_n) trzeci wyraz jest równy 12, a czwarty jest równy −36. Uzupełnij. ___ / 3 pkt

1. iloraz q = _____ 2. a_1 = _____ 3. a_6 = _____

Zadanie 2. Sprawdź, które z ciągów są geometryczne: $a_n = 5 \cdot 2^{n+1}$, $b_n = 3n^2$, $c_n = \frac{(-1)^n}{3^n}$. Dla ciągów geometrycznych podaj iloraz. ___ / 3 pkt

Zadanie 3. Liczby 4, x, 25 (w podanej kolejności) tworzą ciąg geometryczny o wyrazach dodatnich. Liczba x jest równa ___ / 1 pkt

A. 10 **B.** 14,5 **C.** 21 **D.** 100

Zadanie 4. Oblicz sumę: a) pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o $a_1 = 2$ i $q = 3$; b) sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o $a_1 = 48$ i $q = \frac{1}{2}$. ___ / 2 pkt

PIERWSZA ŁAWKA

Zadanie 5. Kwotę 10 000 zł wpłacono na lokatę dwuletnią oprocentowaną 4% w skali roku. Oblicz kwotę na lokacie po dwóch latach: a) przy kapitalizacji rocznej; b) przy kapitalizacji półrocznej; c) przy kapitalizacji rocznej, jeśli od odsetek bank pobiera na końcu 19% podatku.

___ / 3 pkt

Zadanie 6. Oceń, czy zdanie o ciągu geometrycznym (a_n) jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

___ / 3 pkt

1. Jeżeli $a_1 = -2$ i $q = 3$, to ciąg (a_n) jest malejący.	**P**	**F**
2. Jeżeli $a_1 = 5$ i $q = -2$, to ciąg (a_n) jest rosnący.	**P**	**F**
3. Jeżeli $a_1 = 81$ i $q = \frac{1}{3}$, to ciąg (a_n) jest malejący.	**P**	**F**

Zadanie 7. Liczby 3, x, y (w podanej kolejności) tworzą rosnący ciąg geometryczny, a liczby 3, x, $y - 12$ – ciąg arytmetyczny. Wyznacz x i y.

___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Ciąg geometryczny, procent składany, lokaty i kredyty – zadania typu maturalnego

KARTA 3/9

Polecenia i punktacja jak na maturze 2027

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 16 pkt

Zadanie 1. Ciąg geometryczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Drugi wyraz tego ciągu jest równy 12, a trzeci jest równy 18.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Piąty wyraz ciągu (a_n) jest równy ___ / 1 pkt

A. 27 **B.** $\frac{81}{2}$ **C.** 30 **D.** $\frac{243}{4}$

Zadanie 2. Trzywyrazowy ciąg $(2, x-3, 32)$ jest geometryczny i rosnący.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczba x jest równa ___ / 1 pkt

A. −5 **B.** 67 **C.** 20 **D.** 11

Zadanie 3. Ciąg geometryczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 5, a iloraz jest równy 2.
Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe. ___ / 2 pkt

1. Suma sześciu początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa _____ .
2. Liczba 640 jest wyrazem ciągu (a_n) o numerze _____ .

Zadanie 4. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 3 \cdot (-2)^n$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Ciąg (a_n) jest geometryczny.	**P**	**F**
2. Ciąg (a_n) jest malejący.	**P**	**F**

Zadanie 5. Kwotę 20 000 zł wpłacono na lokatę roczną oprocentowaną 6% w skali roku. Odsetki są kapitalizowane co pół roku.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Po roku na lokacie będzie kwota (bez odliczania podatku) ___ / 1 pkt

A. 21 200 zł **B.** 21 218 zł **C.** 20 600 zł **D.** 22 472 zł

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 6. Pani Ewa zaciągnęła kredyt w wysokości 24 000 zł i spłaciła go w 24 ratach miesięcznych. Każda rata składała się z 1000 zł spłaty kredytu oraz odsetek równych 1% kwoty, jaka pozostawała do spłaty przed wpłatą tej raty. ___ / 4 pkt

6.1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. ___ / 1 pkt

Pierwsza rata była równa

A. 1000 zł **B.** 1010 zł **C.** 1240 zł **D.** 1480 zł

6.2. Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe. ___ / 2 pkt

1. Każda następna rata była mniejsza od poprzedniej o _____ zł.
2. Ostatnia rata była równa _____ zł.

6.3. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Łączna kwota odsetek zapłaconych od tego kredytu jest równa 3000 zł.	**P**	**F**
2. Suma wszystkich rat jest większa niż 27 500 zł.	**P**	**F**

Zadanie 7. Ciąg (a_n) jest arytmetyczny, $a_1 = 5$, a jego różnica jest równa $r = 4$. Liczby a_2, a_5, a_k w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny. Oblicz k. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 8. Piłkę upuszczono z wysokości 8 m. Po każdym odbiciu od podłoża piłka wznosi się na wysokość równą $\frac{3}{4}$ wysokości, z której ostatnio spadła. Oblicz drogę, jaką przebędzie piłka od chwili upuszczenia do chwili czwartego uderzenia w podłoże. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Kartkówka 1: ciąg geometryczny – grupa A

15 minut · 9 pkt

KARTA **4/9**

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 9 pkt

Zadanie 1. Ciąg geometryczny (a_n) ma pierwszy wyraz równy 4 i iloraz równy −3. Uzupełnij.

___ / 3 pkt

1. a_3 = _____ 2. a_4 = _____ 3. S_3 = _____

Zadanie 2. Trzywyrazowy ciąg $(x, 12, 48)$ jest geometryczny. Liczba x jest równa

___ / 1 pkt

A. 36 **B.** 4 **C.** −24 **D.** 3

Zadanie 3. W ciągu geometrycznym (a_n) drugi wyraz jest równy −6, a piąty jest równy 162. Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów tego ciągu. Zapisz obliczenia.

___ / 3 pkt

Zadanie 4. Sprawdź, czy ciąg $a_n = 3 \cdot 4^n$ jest geometryczny. Jeśli tak, podaj jego pierwszy wyraz i iloraz. Zapisz obliczenia.

___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Sprawdzian: Ciąg geometryczny, procent składany, lokaty i kredyty – grupa A

45 minut · 20 pkt

KARTA 8/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 20 pkt

Zadanie 1. Ciąg geometryczny (a_n) ma trzeci wyraz równy 18 i iloraz równy −3.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Piąty wyraz tego ciągu jest równy ___ / 1 pkt

A. −162 **B.** 162 **C.** 54 **D.** 486

Zadanie 2. Trzywyrazowy ciąg (8, x, 18) jest geometryczny i ma wyrazy dodatnie.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczba x jest równa ___ / 1 pkt

A. 13 **B.** −12 **C.** 144 **D.** 12

Zadanie 3. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ dla $n \geq 1$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Ciąg (a_n) jest rosnący.	**P**	**F**
2. Suma czterech początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa 54.	**P**	**F**

Zadanie 4. Ciąg geometryczny (a_n) ma pierwszy wyraz równy 1 i iloraz równy −2.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Suma sześciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa ___ / 1 pkt

A. 21 **B.** −21 **C.** −63 **D.** 63

Zadanie 5. Kwotę 12 500 zł wpłacono na lokatę roczną oprocentowaną 4% w skali roku, z półroczną kapitalizacją odsetek.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Po zakończeniu lokaty na rachunku będzie kwota (bez odliczania podatku) ___ / 1 pkt

A. 13 520 zł **B.** 12 750 zł **C.** 13 000 zł **D.** 13 005 zł

Zadanie 6. Ciąg geometryczny (a_n) ma pierwszy wyraz równy 81 i iloraz równy $\frac{1}{3}$.

Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe. ___ / 3 pkt

1. Piąty wyraz tego ciągu jest równy _____ .
2. Suma czterech początkowych wyrazów tego ciągu jest równa _____ .
3. Siódmy wyraz tego ciągu jest równy _____ .

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Ciąg geometryczny, procent składany, lokaty i kredyty – kartkówki, sprawdzian i karty pracy z powtórką, matematyka, klasa 3 LO i technikum (zakres...

Podgląd pokazał 10 z 31 stron. Pełna wersja: 31 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Ciąg geometryczny, procent składany, lokaty i kredyty – najważniejsze wiadomości – 3 zadania, 8 pkt
- Karta 2: Ciąg geometryczny, procent składany, lokaty i kredyty – ćwiczenia – 8 zadań, 21 pkt
- Karta 3: Ciąg geometryczny, procent składany, lokaty i kredyty – zadania typu maturalnego – 8 zadań, 16 pkt
- Karta 4: Kartkówka 1: ciąg geometryczny – grupa A – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 5: Kartkówka 1: ciąg geometryczny – grupa B – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 6: Kartkówka 2: lokaty i kredyty – grupa A – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 7: Kartkówka 2: lokaty i kredyty – grupa B – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 8: Sprawdzian: Ciąg geometryczny, procent składany, lokaty i kredyty – grupa A – 10 zadań, 20 pkt
- Karta 9: Sprawdzian: Ciąg geometryczny, procent składany, lokaty i kredyty – grupa B – 10 zadań, 20 pkt Karta 1 przypomina teorię i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku.

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matematyka-liceum-klasa-3-dzial-04-ciag-geometryczny-procent-skladany-lokaty-i-kred