PIERWSZA ŁAWKA · NAJCZĘSTSZE ZADANIA MATURALNE · PP · MATEMATYKA · MATURA 2027 · POZIOM PODSTAWOWY

L. Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…”

Dowody podzielności i reszt z dzielenia (liczby nieparzyste n = 2k + 1, iloczyny kolejnych liczb, przypadki reszt, dwie liczby z danymi resztami, sumy potęg), nierówności dla każdej liczby rzeczywistej przez kwadrat różnicy, zapis dowodu i argument zamykający – zadanie za 2 punkty obecne w każdym arkuszu podstawowym. Sześć kart: wzorcowe rozwiązania i zasady oceniania CKE, trening, zadania na poziomie matury, zadania trudniejsze i test w grupach A i B – z kluczem i schematami punktowania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…” – jak rozwiązywać i jak ocenia to CKE** Wzorcowe rozwiązania, pułapki, rozgrzewka	4 zad. 8 pkt
2	**Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…” – trening** Zadania krok po kroku	8 zad. 17 pkt
3	**Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…” – zadania na poziomie matury** Polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE 2025–2026	7 zad. 12 pkt
4	**Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…” – zadania trudniejsze** Dla ambitnych – nietypowe ujęcia tego samego typu	6 zad. 11 pkt
5	**Test: Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…” – grupa A** 40 minut · 13 pkt	8 zad. 13 pkt
6	**Test: Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…” – grupa B** 40 minut · 13 pkt	8 zad. 13 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 pokazuje, jak CKE ocenia ten typ zadań (kamienie milowe, typowe uwagi w zasadach oceniania) oraz wzorcowe rozwiązania krok po kroku.
- Karty 2–4 prowadzą od treningu, przez zadania na poziomie matury, do zadań trudniejszych.
- Karty 5 i 6 to równoległy test (grupa A i B) z punktacją jak na maturze.
- Klucz zawiera odpowiedzi, przykładowe pełne rozwiązania i zasady oceniania w stylu CKE 2026.

Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…” – jak rozwiązywać i jak oceni to CKE

Wzorcowe rozwiązania, pułapki, rozgrzewka

KARTA 1/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Gdzie w arkuszu.** Dowód podzielności lub reszty z dzielenia jest w **każdym** arkuszu PP (2023 – zad. 3, 2024 – zad. 3, 2025 – zad. 5, 2026 – zad. 7) i zawsze za 2 punkty. To jedno z najtrudniejszych zadań: poziom wykonania 43%, 56%, 32% i 41%. Formuła: „Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej (nieparzystej) n liczba … jest podzielna przez … / przy dzieleniu przez … daje resztę …”. Przy dowodzie nie ma „Zapisz obliczenia”.
- **Szkielet dowodu (4 kroki).** 1) Założenia w symbolach: „n – liczba całkowita nieparzysta, więc $n = 2k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$”. 2) Przekształcenie do postaci dogodnej: wyłącz dzielnik przed nawias albo zapisz liczbę jako $m \cdot K + r$. 3) Argument słowny: „$k(k + 3)$ jest parzysta, bo k i $k + 3$ mają różną parzystość”, „$K \in \mathbb{Z}$, więc …”. 4) Zakończenie: „To należało wykazać.”
- **Narzędzia.** Iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych $n(n + 1)$ jest parzysty; tak samo $n(n + 3)$, $n(n + 5)$ – czynniki mają różną parzystość. Liczba postaci $m \cdot K + r$, gdzie $K \in \mathbb{Z}$ i $0 \leq r < m$, daje przy dzieleniu przez m resztę r. Gdy teza zależy od reszty (np. „n niepodzielna przez 3”), rozpatrz **wszystkie** przypadki: $n = 3k + 1$ i $n = 3k + 2$. Sumę potęg zapisz jako iloczyn: $5^{12} + 5^{11} - 5^{10} = 5^{10}(25 + 5 - 1) = 29 \cdot 5^{10}$.
- **Nierówności „dla każdej liczby rzeczywistej”.** Przenieś wszystko na jedną stronę i zapisz jako kwadrat różnicy (lub sumę kwadratów) plus liczbę nieujemną: $9x^2 + 4 - 12x = (3x - 2)^2 \geq 0$. Zakończ zdaniem: „kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny, więc nierówność jest prawdziwa”. Przekształcenia równoważne tezy są dozwolone – zaznacz je znakiem $\Leftrightarrow$.

Poziom	Kamień milowy (zasady oceniania 2023–2026)
1 pkt	przekształcenie do postaci dogodnej do wnioskowania, np. $4(k(k + 3) + 4)$, ALBO jeden z przypadków (parzystość, reszta), ALBO połowa argumentacji (np. tylko podzielność przez 2)
2 pkt	pełne rozumowanie z argumentem zamykającym
0 pkt	sprawdzenie tezy dla kilku liczb (nawet stu!) – to nie jest dowód; zapis „… = 0” zamiast uzasadnienia
uwagi	inne wyrażenie niż w treści – najwyżej 1 pkt; reszty: wszystkie przypadki – 2 pkt, co najmniej połowa – 1 pkt

- **Błędy ze sprawozdań CKE.** 2023: brak argumentu, dlaczego $4k(k + 1)$ dzieli się przez 8; nowa zmienna bez „$k \in \mathbb{Z}$”; „cecha podzielności przez 8” wymyślona przez zdającego. 2025: błędy we wzorach skróconego mnożenia i przy wyłączaniu przed nawias, zdający „nie zauważa, że dowód jest już skończony”. Diagnoza 2023: tylko 10% poprawnych – najczęściej sprawdzanie na przykładach.

Przykład 5. (dowód, 2 pkt) Wykaż, że liczba $5^{12} + 5^{11} - 5^{10}$ jest podzielna przez 29.

Wyłączamy najmniejszą potęgę: $5^{12} + 5^{11} - 5^{10} = 5^{10}(5^2 + 5 - 1) = 5^{10} \cdot 29$.

5^{10} jest liczbą całkowitą, więc liczba jest podzielna przez 29. To należało wykazać.

Obliczanie wartości tej liczby kalkulatorem nie jest dowodem (kalkulator prosty nie pokaże wszystkich cyfr).

ZADANIA

Zadanie 1. Zapisz za pomocą liczby całkowitej *k*. ___ / 3 pkt

1. liczba, która przy dzieleniu przez 9 daje resztę 4: _____
2. trzy kolejne liczby parzyste: _____
3. liczba nieparzysta podzielna przez 3: _____

Zadanie 2. Liczba $20k + 30$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, jest dla każdego *k* podzielna przez ___ / 1 pkt

A. 10 **B.** 30 **C.** 4 **D.** 20

Zadanie 3. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 3 pkt

1. Iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest liczbą parzystą.	**P**	**F**
2. Liczba $6k + 5$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, przy dzieleniu przez 3 daje resztę 5.	**P**	**F**
3. Sprawdzenie, że teza jest prawdziwa dla stu kolejnych liczb naturalnych, jest jej dowodem.	**P**	**F**

Zadanie 4. Reszta z dzielenia liczby $5(2k + 3) + 1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, przez 10 jest równa ___ / 1 pkt

A. 1 **B.** 16 **C.** 0 **D.** 6

PIERWSZA ŁAWKA

Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…” – trening

Zadania krok po kroku

KARTA 2/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 17 pkt

Zadanie 1. Uzupełnij tak, aby otrzymać równość prawdziwą dla każdej liczby całkowitej. ___ / 3 pkt

1. $(n + 4)^2 - n^2 = 8 \cdot (_____)$
2. $(2k + 1)^2 + 3 = 4 \cdot (_____)$
3. $6n^2 + 6n = 6n \cdot (_____)$

Zadanie 2. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^2 + 5n + 8$ jest parzysta. ___ / 2 pkt

Zadanie 3. Liczba całkowita a przy dzieleniu przez 7 daje resztę 3. Wykaż, że liczba $a^2 + 5$ jest podzielna przez 7. ___ / 2 pkt

Zadanie 4. Liczba całkowita n przy dzieleniu przez 6 daje resztę 5. Reszta z dzielenia liczby n^2 przez 6 jest równa ___ / 1 pkt

A. 4 **B.** 5 **C.** 1 **D.** 25

PIERWSZA ŁAWKA

Zadanie 5. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $9x^2 + 4 \geq 12x$.

___ / 2 pkt

Zadanie 6. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

___ / 3 pkt

1. Z równości $6n^2 + 6n = 6n(n + 1)$ wynika, że liczba $6n^2 + 6n$ jest podzielna przez 12 dla każdej liczby całkowitej n.	**P**	**F**
2. Zapis $6n(n + 1) = 0$ uzasadnia, że liczba $6n(n + 1)$ jest podzielna przez 6.	**P**	**F**
3. Każda liczba postaci $3k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, jest nieparzysta.	**P**	**F**

Zadanie 7. Liczba całkowita a przy dzieleniu przez 6 daje resztę 5, a liczba całkowita b – resztę 3. Wykaż, że iloczyn ab przy dzieleniu przez 6 daje resztę 3.

___ / 2 pkt

Zadanie 8. Wykaż, że liczba $7^9 - 7^8 + 7^7$ jest podzielna przez 43.

___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…" – zadania na poziomie matury

Polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE 2025–2026

KARTA 3/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 12 pkt

Zadanie 1. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $5n^2 + 5n + 13$ przy dzieleniu przez 10 daje resztę 3. ___ / 2 pkt

Zadanie 2. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n, która nie jest podzielna przez 3, liczba $4n^2 + 5$ jest podzielna przez 3. ___ / 2 pkt

Zadanie 3. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej nieparzystej n liczba $n^2 + 12n + 3$ jest podzielna przez 8. ___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 4. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczba $3^{11} + 3^{10} - 3^9$ jest podzielna przez

___ / 1 pkt

A. 7 **B.** 11 **C.** 13 **D.** 5

Zadanie 5. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

___ / 1 pkt

1. Dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^2 + n + 3$ jest nieparzysta.	**P**	**F**
2. Dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^2 + n + 1$ jest podzielna przez 3.	**P**	**F**

Zadanie 6. Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2.

___ / 2 pkt

Zadanie 7. Liczba całkowita a przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2, a liczba całkowita b – resztę 4. Wykaż, że liczba $a^2 + b$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3.

___ / 2 pkt

PIERWSZA ŁAWKA

Test: Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…” – grupa A

40 minut · 13 pkt

KARTA 5/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 13 pkt

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $20k + 35$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, jest dla każdego k podzielna przez ___ / 1 pkt

A. 20 **B.** 35 **C.** 5 **D.** 10

Zadanie 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba całkowita n przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3. Reszta z dzielenia liczby $n^2 + n$ przez 5 jest równa ___ / 1 pkt

A. 0 **B.** 12 **C.** 3 **D.** 2

Zadanie 3. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^2 + 3n + 1$ jest nieparzysta.	**P**	**F**
2. Dla każdej liczby całkowitej k liczba $(2k + 1)^2$ jest podzielna przez 4.	**P**	**F**

Zadanie 4. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej nieparzystej n liczba $n^2 + 16n + 7$ jest podzielna przez 8. ___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Matura 2027 z matematyki (poziom podstawowy) – najczęstsze zadania: Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…” (karty pracy, test A i

Podgląd pokazał 8 z 26 stron. Pełna wersja: 26 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…” – jak rozwiązywać i jak oceni to CKE – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 2: Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…” – trening – 8 zadań, 17 pkt
- Karta 3: Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…” – zadania na poziomie matury – 7 zadań, 12 pkt
- Karta 4: Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…” – zadania trudniejsze – 6 zadań, 11 pkt
- Karta 5: Test: Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…” – grupa A – 8 zadań, 13 pkt
- Karta 6: Test: Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…” – grupa B – 8 zadań, 13 pkt Karta 1 pokazuje, jak CKE ocenia ten typ zadań (kamienie milowe i uwagi z zasad oc

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matura-2027-matematyka-podstawowa-najczestsze-zadania-l-dowody-algebraiczne-po