PIERWSZA ŁAWKA · ZESTAW DZIAŁOWY · MATEMATYKA · KLASA 4 LO I TECHNIKUM · ZAKRES ROZSZERZONY

Dział 12. Stereometria – zakres rozszerzony

Twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny i o trzech prostopadłych, kąt między ścianą a podstawą i między ścianami bocznymi ostrosłupa (kąt liniowy, twierdzenie cosinusów), przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych – wyznaczanie, nazwa figury, pole (także z trygonometrią). Dziewięć kart: teoria z przykładami, ćwiczenia, zadania typu maturalnego, dwie kartkówki (A i B) i sprawdzian (A i B) – z kluczem i zasadami oceniania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Stereometria – zakres rozszerzony – najważniejsze wiadomości** Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka	4 zad. 9 pkt
2	**Stereometria – zakres rozszerzony – ćwiczenia** Ćwiczę umiejętności z działu	8 zad. 25 pkt
3	**Stereometria – zakres rozszerzony – zadania typu maturalnego** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	6 zad. 24 pkt
4	**Kartkówka 1: twierdzenie o trzech prostopadłych, kąty między ścianami – grupa A** 15 minut · 9 pkt	4 zad. 9 pkt
5	**Kartkówka 1: twierdzenie o trzech prostopadłych, kąty między ścianami – grupa B** 15 minut · 9 pkt	4 zad. 9 pkt
6	**Kartkówka 2: przekroje sześcianu i ostrosłupów – grupa A** 15 minut · 8 pkt	3 zad. 8 pkt
7	**Kartkówka 2: przekroje sześcianu i ostrosłupów – grupa B** 15 minut · 8 pkt	3 zad. 8 pkt
8	**Sprawdzian: Stereometria – zakres rozszerzony – grupa A** 60 minut · 23 pkt	8 zad. 23 pkt
9	**Sprawdzian: Stereometria – zakres rozszerzony – grupa B** 60 minut · 23 pkt	8 zad. 23 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 przypomina najważniejsze wiadomości z działu i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku – od niej warto zacząć.
- Karta 2 to ćwiczenia, a karta 3 – zadania w formule matury 2027 (polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE).
- Karty 4–7 to dwie kartkówki (po 15 minut), każda w grupach A i B. Karty 8–9 to sprawdzian (45 minut) w grupach A i B – te same typy zadań i ta sama punktacja, inne liczby.
- Klucz na końcu zestawu zawiera odpowiedzi, przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE (kamienie milowe, błąd rachunkowy = −1 pkt).
- Osobny plik „Powtórka” zbiera definicje, wzory (z zaznaczeniem, które są w karcie wzorów CKE), typowe błędy i test „Sprawdź się”.

Materiał oryginalny. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: X.R1–X.R2 (w tle X.1–X.3, X.5, VII.3–VII.4); cele ogólne IV.1, IV.4; dowody PR pkt 10–11. Miejsce w seriach podręczników: NE ZPiR kl. 4 · Pazdro ZR kl. 4 · GWO ZR kl. 3 · technikum kl. 5. Nazwy wydawnictw i serii podano tylko informacyjnie – materiał nie jest z nimi powiązany. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

Stereometria – zakres rozszerzony – najważniejsze wiadomości

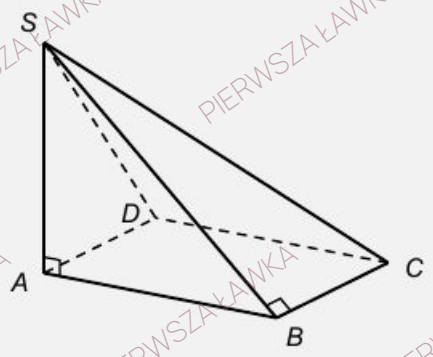
Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka

KARTA 1/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 9 pkt

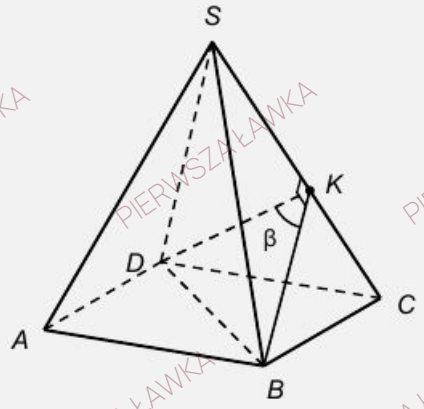
PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Prosta prostopadła do płaszczyzny** jest prostopadła do każdej prostej tej płaszczyzny. **Twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny:** jeżeli proste k i l leżą w płaszczyźnie i mają dokładnie jeden punkt wspólny, a prosta n jest prostopadła do k i do l, to n jest prostopadła do każdej prostej m tej płaszczyzny. Wystarczą więc **dwie przecinające się** proste – np. $BD \perp AC$ i $BD \perp SO$ oznacza, że przekątna BD jest prostopadła do całej płaszczyzny ACS.
- **Twierdzenie o trzech prostopadłych** (jest w karcie wzorów). Prosta k przebija płaszczyznę π i nie jest do niej prostopadła, l – rzut prostokątny prostej k na π, m – prosta leżąca w π. Wtedy $m \perp k \Leftrightarrow m \perp l$. Przykład: w ostrosłupie $ABCDS$ o podstawie prostokąta, w którym $SA \perp (ABCD)$, rzutem krawędzi SB jest AB, a $BC \perp AB$ – zatem $BC \perp SB$ i ściana SBC jest trójkątem prostokątnym.



- **Kąt między ścianą a podstawą** mierzymy kątem liniowym: z jednego punktu wspólnej krawędzi prowadzimy w obu płaszczyznach półproste prostopadłe do krawędzi. Na rysunku wyżej ściana SBC ma z podstawą wspólną krawędź BC, a $AB \perp BC$ i $SB \perp BC$ (tw. o trzech prostopadłych) – szukany kąt to $\sphericalangle SBA$. Zawsze napisz, **dlaczego** to ten kąt.

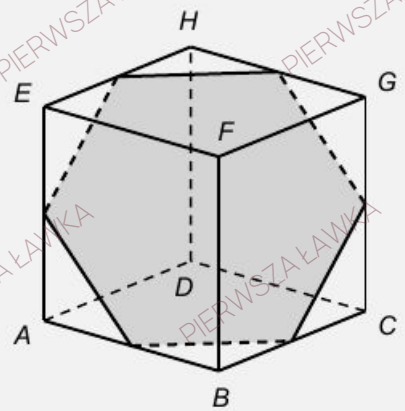
- **Kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi** ostrosłupa prawidłowego (np. *BCS* i *CDS*): prowadzimy wysokości ścian *BK* i *DK* na wspólną krawędź *SC*. Ściany są przystające, więc obie wysokości mają **ten sam spodek** *K*, a szukany kąt to $\beta = \sphericalangle BKD$. Obliczamy go z twierdzenia cosinusów w trójkącie *BKD*: $|BD|^2 = 2x^2 - 2x^2\cos\beta$, gdzie $x = |BK|$ (z pola ściany: $x \cdot |SC| = |BC| \cdot h_s$, h_s – wysokość ściany poprowadzona z *S*). W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym ten kąt jest zawsze rozwarty. To **nie** jest kąt *BSD* ani *BCD*!



- **Przekrój bryły płaszczyzną** to wielokąt: jego wierzchołki leżą na krawędziach bryły, a boki – na ścianach (na każdej ścianie co najwyżej jeden bok). Jak go wyznaczyć: 1) zaznacz dane punkty; 2) łącz punkty leżące na tej samej ścianie; 3) na ścianach równoległych boki przekroju są równoległe; 4) w razie potrzeby przedłuż krawędź i bok do przecięcia w płaszczyźnie ściany. Zawsze **nazwij figurę** i uzasadnij nazwę.
- **Przekroje sześcianu** o krawędzi *a* (najczęstsze):

płaszczyzna przechodzi przez	przekrój	pole
dwie przeciwległe krawędzie, np. *AE* i *CG*	prostokąt $a \times a\sqrt{2}$	$a^2\sqrt{2}$
końce trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka, np. *B*, *D*, *E*	trójkąt równoboczny o boku $a\sqrt{2}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
środki sześciu krawędzi (prostopadle do przekątnej sześcianu)	sześciokąt foremny o boku $\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$
przekątną *AC* podstawy, pod kątem φ do podstawy	trójkąt, gdy $\operatorname{tg}\varphi \le \sqrt{2}$; trapez równoramienny, gdy $\operatorname{tg}\varphi > \sqrt{2}$	zależy od φ

Przekrój sześcianu może mieć 3, 4, 5 albo 6 wierzchołków (sześcian ma 6 ścian).

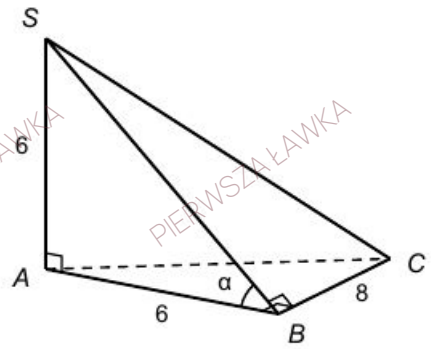


- **Przekroje ostrosłupa prawidłowego.** Płaszczyzna równoległa do podstawy daje wielokąt podobny do podstawy w skali $k = \frac{H - d}{H}$ (d – odległość płaszczyzny od podstawy), jego pole to $k^2 \cdot P_p$. Płaszczyzna przez wierzchołek S i przekątną podstawy – trójkąt równoramienny o wysokości H. Płaszczyzna przez krawędź podstawy AB przecinająca krawędzie SC i SD – trapez równoramienny $ABKL$ ($KL \parallel CD \parallel AB$).
- **Pole przekroju z trygonometrią.** Jeżeli płaszczyzna przekroju przechodzi przez prostą l leżącą w podstawie i jest nachylona do podstawy pod kątem φ, to punkt przekroju, którego rzut na podstawę leży w odległości d od l, znajduje się na wysokości $d \cdot \operatorname{tg} \varphi$, a odcinek przekroju prostopadły do l ma długość $\frac{d}{\cos \varphi}$. Stąd sprawdzamy, którą krawędź lub ścianę przetnie płaszczyzna (np. czy wysokość nie przekroczy krawędzi sześcianu).
- **Zapis rozwiązania (jak ocenia CKE):** rysunek bryły z zaznaczonym przekrojem lub kątem; nazwa figury przekroju z uzasadnieniem (bez nazwy – mniej punktów, arkusz diagnostyczny 2022); uzasadnienie, że zaznaczony kąt jest szukanym kątem (rzut, tw. o trzech prostopadłych); własności bryły tylko z treści – bez przyjmowania, że ostrosłup jest prawidłowy albo ściany są równoboczne. Za błędnie wskazany kąt między ścianami CKE daje najwyżej 1 punkt (matury 2025–2026: poziom wykonania 16% i 30%).
- W karcie wzorów CKE są: twierdzenie o trzech prostych prostopadłych, pola i objętości brył, twierdzenie cosinusów, tablica wartości funkcji trygonometrycznych. Nie ma: twierdzenia o prostej prostopadłej do płaszczyzny, definicji kąta dwuściennego ani przekrojów.

PIERWSZA ŁAWKA

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. Podstawą ostrosłupa *ABCS* jest trójkąt prostokątny *ABC*, w którym $\sphericalangle ABC = 90°$, $|AB| = 6$, $|BC| = 8$. Krawędź *SA* jest prostopadła do płaszczyzny podstawy i $|SA| = 6$. Uzasadnij, że ściana *SBC* jest trójkątem prostokątnym, i oblicz jej pole. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany *SBC* do płaszczyzny podstawy.



$SA \perp (ABC)$, więc rzutem krawędzi *SB* na podstawę jest *AB*. Prosta *BC* leży w podstawie i $BC \perp AB$, zatem z twierdzenia o trzech prostopadłych $BC \perp SB$ – trójkąt *SBC* jest prostokątny (kąt prosty przy *B*).

$|SB| = \sqrt{36 + 36} = 6\sqrt{2}$, pole ściany: $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$.

Wspólna krawędź ściany i podstawy to *BC*; $AB \perp BC$ i $SB \perp BC$, więc kąt nachylenia to $\alpha = \sphericalangle SBA$. W trójkącie prostokątnym *SAB*: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{6} = 1$, $\alpha = 45°$.

Przykład 2. Wszystkie krawędzie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego *ABCDS* mają długość 6. Oblicz cosinus kąta między ścianami bocznymi *BCS* i *CDS*.

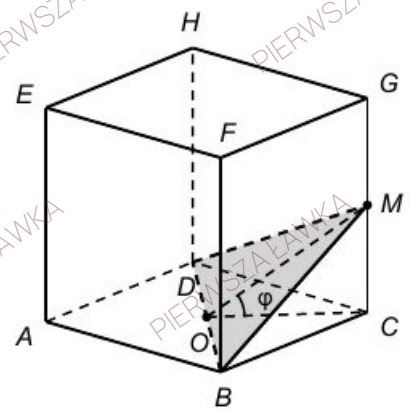
Ściana *BCS* jest trójkątem równobocznym o boku 6. Jej wysokość *BK* poprowadzona na krawędź *SC* ma spodek w środku *K* krawędzi *SC* i długość $\frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$; tak samo $|DK| = 3\sqrt{3}$ (ściany są przystające, spodek ten sam). Szukany kąt to $\beta = \sphericalangle BKD$.

$|BD| = 6\sqrt{2}$ (przekątna kwadratu). Z twierdzenia cosinusów w trójkącie *BKD*:

$72 = 27 + 27 - 2 \cdot 27 \cdot \cos\beta$, więc $\cos\beta = \frac{54 - 72}{54} = -\frac{1}{3}$ ($\beta \approx 109°$ – kąt rozwarty).

Podgląd • Pierwsza Ławka

Przykład 3. Krawędź sześcianu *ABCDEFGH* ma długość 4, a punkt *M* jest środkiem krawędzi *CG*. Wyznacz przekrój sześcianu płaszczyzną *BDM*, nazwij go i oblicz jego pole. Oblicz tangens kąta nachylenia płaszczyzny przekroju do płaszczyzny podstawy.



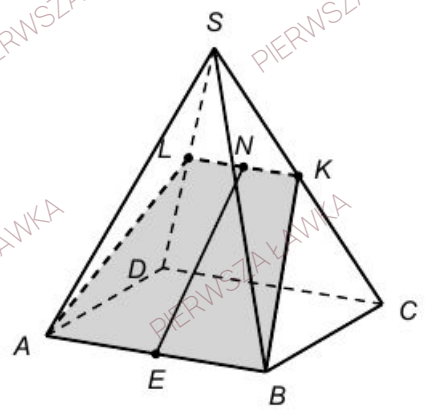
Punkty *B*, *D* leżą w podstawie, *M* – na krawędzi *CG*; łączymy punkty leżące na tych samych ścianach: *BD* (podstawa), *BM* (ściana *BCGF*), *DM* (ściana *CDHG*). Przekrój to trójkąt *BDM*; $|BM| = |DM| = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$ – trójkąt równoramienny.

O – środek *BD*. $OC \perp BD$ (przekątne kwadratu), a *OC* jest rzutem *OM* na podstawę, więc z tw. o trzech prostopadłych $OM \perp BD$ – *OM* jest wysokością trójkąta i $\varphi = \sphericalangle MOC$ jest kątem nachylenia przekroju do podstawy.

$|OC| = 2\sqrt{2}$, $|OM| = \sqrt{8 + 4} = 2\sqrt{3}$, pole: $\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{6}$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

PIERWSZA ŁAWKA

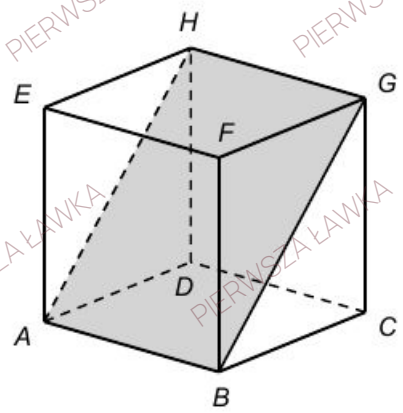
Przykład 4. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego *ABCDS* ma długość 8, a wysokość ostrosłupa – 6. Płaszczyzna przechodzi przez krawędź *AB* i środek *K* krawędzi *SC*. Nazwij figurę, która jest przekrojem ostrosłupa tą płaszczyzną, i oblicz jej pole.



$AB \parallel CD$, więc płaszczyzna przekroju przecina ścianę CDS wzdłuż odcinka $KL \parallel CD$; K jest środkiem SC, więc (tw. Talesa) L jest środkiem SD i $|KL| = \frac{1}{2}|CD| = 4$. Przekrój to trapez równoramienny $ABKL$ ($|AL| = |BK|$ z symetrii).
E, F – środki AB i CD, N – środek KL (leży na SF w połowie). W płaszczyźnie EFS: E ma odległość 4 od osi ostrosłupa, a N leży w odległości 2 od osi po drugiej stronie, na wysokości 3. Wysokość trapezu: $|EN| = \sqrt{(4+2)^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.
Pole: $\frac{8+4}{2} \cdot 3\sqrt{5} = 18\sqrt{5}$.

ZADANIA

Zadanie 1. Dany jest sześcian *ABCDEFGH* (zobacz rysunek). Kątem między płaszczyzną *ABG* (zaznaczony przekrój) a płaszczyzną podstawy *ABC* jest kąt ___ / 1 pkt



A. $\sphericalangle GAC$ **B.** $\sphericalangle GBF$ **C.** $\sphericalangle BGC$ **D.** $\sphericalangle GBC$

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 2. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 3 pkt

1. Jeżeli prosta jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych płaszczyzny, to jest prostopadła do tej płaszczyzny.	**P**	**F**
2. Jeżeli prosta jest prostopadła do dwóch równoległych prostych płaszczyzny, to jest prostopadła do tej płaszczyzny.	**P**	**F**
3. Kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest kątem rozwartym.	**P**	**F**

Zadanie 3. Przekrój sześcianu *ABCDEFGH* płaszczyzną przechodzącą przez podane punkty jest pewnym wielokątem. Wpisz jego nazwę. ___ / 3 pkt

1. *A*, *C*, *G*: _____
2. *B*, *D*, *E*: _____
3. środki krawędzi *AB*, *BC*, *CG*, *GH*, *HE*, *EA*: _____

Zadanie 4. Krawędź sześcianu *ABCDEFGH* ma długość 2. Oblicz pole przekroju. ___ / 2 pkt

1. przekrój płaszczyzną *ACG*: _____
2. przekrój płaszczyzną *BDE*: _____

PIERWSZA ŁAWKA

Stereometria – zakres rozszerzony – ćwiczenia

KARTA 2/9

Ćwiczę umiejętności z działu

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 25 pkt

Zadanie 1. Ostrosłup prawidłowy czworokątny *ABCDS* przecięto płaszczyzną. Dopasuj do każdego opisu płaszczyzny (1–4) figurę, która jest przekrojem (a–d). ___ / 4 pkt

1. płaszczyzna równoległa do podstawy przecinająca krawędzie boczne
2. płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek *S* i przekątną *AC*
3. płaszczyzna przechodząca przez krawędź *AB* i środek krawędzi *SC*
4. płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek *S* i środki krawędzi *AB*, *CD*

a) trójkąt równoramienny o podstawie *AC*

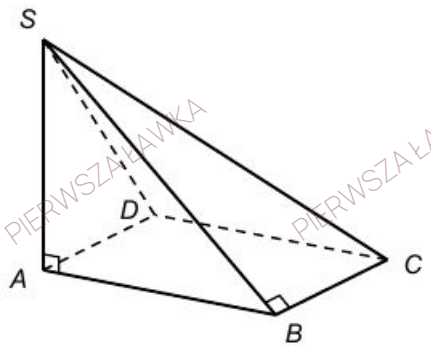
b) trapez równoramienny

c) kwadrat

d) trójkąt równoramienny o podstawie równej krawędzi podstawy ostrosłupa

1 ____ 2 ____ 3 ____ 4 ____

Zadanie 2. Podstawą ostrosłupa *ABCDS* jest prostokąt *ABCD*, w którym |*AB*| = 4 i |*AD*| = 3. Krawędź *SA* jest prostopadła do płaszczyzny podstawy i |*SA*| = 4 (zobacz rysunek). Uzasadnij, że wszystkie ściany boczne są trójkątami prostokątnymi, i oblicz pole powierzchni bocznej. ___ / 4 pkt



Podgląd • Pierwsza Ławka

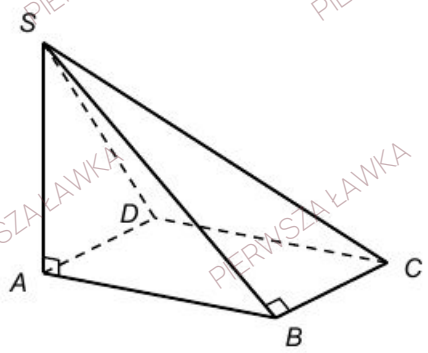
Kartkówka 1: twierdzenie o trzech prostopadłych, kąty między ścianami – grupa A

15 minut · 9 pkt

KARTA 4/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 9 pkt

Zadanie 1. Podstawą ostrosłupa *ABCDS* jest prostokąt *ABCD*, a krawędź *SA* jest prostopadła do płaszczyzny podstawy (zobacz rysunek). Kątem nachylenia ściany *BCS* do płaszczyzny podstawy jest kąt ___ / 1 pkt



A. $\sphericalangle SCB$ **B.** $\sphericalangle SBA$ **C.** $\sphericalangle SBC$ **D.** $\sphericalangle SCA$

Zadanie 2. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 2 pkt

1. Każda prosta prostopadła do dwóch prostych leżących w płaszczyźnie jest prostopadła do tej płaszczyzny.	**P**	**F**
2. Prosta *k* przebija płaszczyznę (nie pod kątem prostym). Jeżeli prosta *m* tej płaszczyzny jest prostopadła do rzutu prostej *k*, to $m \perp k$.	**P**	**F**

Zadanie 3. Podstawą ostrosłupa *ABCS* jest trójkąt prostokątny *ABC* z kątem prostym przy wierzchołku *B*, w którym $|AB| = 5$ i $|BC| = 12$. Krawędź *SA* jest prostopadła do płaszczyzny podstawy i $|SA| = 5\sqrt{3}$. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany *BCS* do płaszczyzny podstawy i pole tej ściany. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Sprawdzian: Stereometria – zakres rozszerzony – grupa A

KARTA 8/9

60 minut · 23 pkt

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 23 pkt

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym *ABCDS* punkt *K* jest spodkiem wysokości ściany *BCS* poprowadzonej z wierzchołka *B*. Kątem między ścianami bocznymi *BCS* i *CDS* jest kąt ___ / 1 pkt

A. $\sphericalangle BKC$ **B.** $\sphericalangle BCD$ **C.** $\sphericalangle BKD$ **D.** $\sphericalangle BSD$

Zadanie 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Krawędź sześcianu ma długość 8. Pole przekroju sześcianu płaszczyzną przechodzącą przez środki trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka jest równe ___ / 1 pkt

A. $4\sqrt{3}$ **B.** $16\sqrt{3}$ **C.** $32\sqrt{3}$ **D.** $8\sqrt{3}$

Zadanie 3. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Przekrój sześcianu płaszczyzną może być pięciokątem.	**P**	**F**
2. Przekrój sześcianu płaszczyzną może być siedmiokątem.	**P**	**F**

Zadanie 4. Podstawą ostrosłupa *ABCDS* jest prostokąt *ABCD*, a krawędź *SB* jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Wykaż, że trójkąt *CDS* jest prostokątny. ___ / 3 pkt

PIERWSZA ŁAWKA

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Stereometria – zakres rozszerzony – kartkówki, sprawdzian i karty pracy z powtórką, matematyka, klasa 4 LO i technikum (zakres rozszerzony)

Podgląd pokazał 12 z 45 stron. Pełna wersja: 45 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Stereometria – zakres rozszerzony – najważniejsze wiadomości – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 2: Stereometria – zakres rozszerzony – ćwiczenia – 8 zadań, 25 pkt
- Karta 3: Stereometria – zakres rozszerzony – zadania typu maturalnego – 6 zadań, 24 pkt
- Karta 4: Kartkówka 1: twierdzenie o trzech prostopadłych, kąty między ścianami – grupa A – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 5: Kartkówka 1: twierdzenie o trzech prostopadłych, kąty między ścianami – grupa B – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 6: Kartkówka 2: przekroje sześcianu i ostrosłupów – grupa A – 3 zadania, 8 pkt
- Karta 7: Kartkówka 2: przekroje sześcianu i ostrosłupów – grupa B – 3 zadania, 8 pkt
- Karta 8: Sprawdzian: Stereometria – zakres rozszerzony – grupa A – 8 zadań, 23 pkt
- Karta 9: Sprawdzian: Stereometria – zakres rozszerzony – grupa B – 8 zadań, 23 pkt Karta 1 przypomina teorię i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku.

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail
pierwszalawka.pl/material/matematyka-liceum-klasa-4-zr-dzial-12-stereometria-zakres-rozszerzony