Rozdział 3. Układy równań i zadania tekstowe

Układy dwóch równań liniowych (metody, liczba rozwiązań, interpretacja geometryczna), wybór układu opisującego treść, zadania tekstowe z procentami (podział kwoty, bilety i koszty, zmiany procentowe), mieszaniny, stopy i ceny mieszanek, uzasadnienie jedyności przy metodzie prób – zadania 9–11 arkusza podstawowego. 65 zadań maturalnych z matematyki (poziom podstawowy) w trzech sekcjach: wprowadzające, maturalne i trudniejsze, z repetytorium, wzorcowymi rozwiązaniami i kluczem z zasadami oceniania w stylu CKE.

Karta	Temat	Zadania
1	**Rozdział 3. Układy równań i zadania tekstowe – repetytorium** Najważniejsze wiadomości, wzorcowe rozwiązania, jak oceni to CKE	4 zad. 8 pkt
2	**A. Zadania wprowadzające – Układy równań liniowych i zadania tekstowe** Proste ćwiczenia umiejętności z tematu	11 zad. 25 pkt
3	**A. Zadania wprowadzające – trening: Układy równań i zadania tekstowe** Zadania krok po kroku	7 zad. 13 pkt
4	**B. Zadania maturalne – Układy równań liniowych i zadania tekstowe** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	25 zad. 45 pkt
5	**B. Zadania maturalne – Układy równań i zadania tekstowe** Na poziomie arkuszy CKE 2025–2026	13 zad. 21 pkt
6	**C. Zadania trudniejsze – Układy równań i zadania tekstowe** Nietypowe ujęcia i zadania wieloetapowe	5 zad. 10 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Rozdział zaczyna się od repetytorium: najważniejsze wiadomości, wzorcowe rozwiązania krok po kroku i to, jak CKE ocenia ten typ zadań.
- Sekcja A to zadania wprowadzające, sekcja B – zadania maturalne (formuły poleceń i punktacja jak w arkuszach CKE), sekcja C – zadania trudniejsze.
- Na końcu jest klucz: odpowiedzi, przykładowe pełne rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE.
- Osobny plik „Powtórka” zbiera wzory (z podziałem: są w karcie wzorów / trzeba pamiętać), typowe błędy i test „Sprawdź się”.

Rozdział 3. Układy równań i zadania tekstowe – repetytorium

Najważniejsze wiadomości, wzorcowe rozwiązania, jak oceni to CKE

KARTA 1/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Gdzie w arkuszu.** Zadania 9–11 arkusza PP: zadanie zamknięte – wybór układu równań opisującego treść (2024 r.: tylko 57% poprawnych) albo dwie proste na rysunku i liczba rozwiązań układu; od 2025 r. **zadanie otwarte za 2 pkt** z procentami – podział budżetu (2025 r., 30% – najtrudniejsze zadanie otwarte w arkuszu) i bilety z kosztami organizacji (2026 r., 40%).

Punkty (ZO CKE 2025–2026)	Za co
1 pkt	poprawny model: układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi ALBO równanie z jedną niewiadomą ALBO poprawne rozumowanie „arytmetyczne” (np. „gdyby wszystkie bilety były ulgowe…”)
2 pkt	poprawny wynik – odpowiedź na pytanie z treści
1 pkt zamiast 2	metoda prób bez uzasadnienia, że rozwiązanie jest jedyne; przybliżenia dające inny wynik; poprawny układ bez rozwiązania
0 pkt	procent od złej kwoty; procent składany tam, gdzie go nie ma; dodatkowe założenie (np. „po równo”)

- **Wzorzec zapisu (5 kroków).** 1) Oznaczenia z jednostką i warunkiem: „x – liczba biletów normalnych, y – ulgowych, x, y – liczby naturalne”. 2) Każde zdanie treści – jedno równanie. 3) Rozwiązanie układu (podstawianie albo przeciwne współczynniki) z zapisem działań. 4) Sprawdzenie w treści: liczby dodatnie, całkowite, realne. 5) Odpowiedź dokładnie na pytanie – jeśli pytają o bilety ulgowe, nie kończ na normalnych.
- **Procent od właściwej kwoty.** „13% kwoty przyznanej zespołowi A” to $0{,}13x$, gdzie x – kwota zespołu A (a nie 13% całości). „Po odliczeniu 20% wpływów zostało P zł” to $0{,}8 \cdot (\text{wpływy}) = P$. „Liczba o 40% większa od y” to $1{,}4y$. W zadaniach o podziale kwoty nie ma procentu składanego.
- **Mieszaniny i ceny.** Masa substancji = stężenie · masa roztworu, np. w 500 g solanki 6% jest $0{,}06 \cdot 500 = 30$ g soli. Wartość mieszanki = cena za kg · masa. Równanie „bilansu”: tyle samo soli (złotówek) przed zmieszaniem i po nim. Odparowanie wody nie zmienia masy soli.
- **Metoda prób.** Jeśli „odgadniesz” liczby, uzasadnij, że innych nie ma – np. każda zamiana jednego biletu normalnego na ulgowy zmniejsza wpływy o tę samą kwotę, więc danej kwocie odpowiada tylko jedna liczba biletów. Bez tego zdania dostaniesz najwyżej 1 pkt. Najpewniej: zapisz i rozwiąż układ.

- **Interpretacja geometryczna układu.** Każde równanie to prosta. Różne współczynniki kierunkowe – dokładnie jedno rozwiązanie; proste równoległe i różne – brak rozwiązań (układ sprzeczny); ta sama prosta – nieskończenie wiele rozwiązań (układ nieoznaczony). Szybki test: czy współczynniki jednego równania są proporcjonalne do współczynników drugiego? Układów równań nie ma w karcie wzorów.

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. (otwarte, 0–2) Na koncert charytatywny sprzedano 250 biletów: normalne po 40 zł i ulgowe po 25 zł. Koszty organizacji pochłonęły 15% wpływów ze sprzedaży biletów, a pozostałe 7480 zł przekazano na cel charytatywny. Oblicz liczbę sprzedanych biletów ulgowych. Zapisz obliczenia.

Sposób I (układ równań). x – liczba biletów normalnych, y – ulgowych ($x, y \in \mathbb{N}$). Wpływy: W, $0{,}85W = 7480$, więc $W = 8800$ zł.

$$\begin{cases} x + y = 250 \\ 40x + 25y = 8800 \end{cases} \leftarrow \text{1 pkt}$$

$y = 250 - x$: $40x + 6250 - 25x = 8800$, $15x = 2550$, $x = 170$, $y = 80$.

Sprawdzenie: $40 \cdot 170 + 25 \cdot 80 = 6800 + 2000 = 8800$, $0{,}85 \cdot 8800 = 7480$. Odpowiedź: sprzedano 80 biletów ulgowych. ← 2 pkt

Sposób II („arytmetyczny"). Gdyby wszystkie bilety były ulgowe, wpływy wyniosłyby $250 \cdot 25 = 6250$ zł. Brakuje $8800 - 6250 = 2550$ zł, a każdy bilet normalny jest droższy o 15 zł: $2550 : 15 = 170$ biletów normalnych, więc ulgowych jest $250 - 170 = 80$.

Pułapki: 15% odjęte od liczby biletów; $7480 : 1{,}15$ zamiast $7480 : 0{,}85$ (procent od złej kwoty).

Przykład 2. (otwarte, 0–2) Gmina przeznaczyła łącznie 450 000 zł na remonty dwóch szkół. Do końca wakacji wykorzystano 18% kwoty przyznanej pierwszej szkole i 12% kwoty przyznanej drugiej szkole – łącznie 64 800 zł. Oblicz kwotę przyznaną pierwszej szkole.

x – kwota dla pierwszej szkoły (zł), y – dla drugiej (zł), $x > 0$, $y > 0$.

$$\begin{cases} x + y = 450\,000 \\ 0{,}18x + 0{,}12y = 64\,800 \end{cases} \leftarrow \text{1 pkt}$$

$0{,}18x + 0{,}12(450\,000 - x) = 64\,800$, $0{,}06x + 54\,000 = 64\,800$, $0{,}06x = 10\,800$, $x = 180\,000$ ($y = 270\,000$).

Odpowiedź: pierwsza szkoła otrzymała 180 000 zł. ← 2 pkt

Błędy z matury 2025 (30%): liczenie 18% i 12% od 450 000 zł; procent składany; przyjęcie, że szkoły dostały po równo.

Przykład 3. Kawę po 60 zł za kilogram zmieszano z kawą po 90 zł za kilogram i otrzymano 30 kg mieszanki, której kilogram kosztuje 70 zł. Oblicz, ile kilogramów każdej kawy użyto.

x – masa tańszej kawy (kg), y – droższej (kg). Wartość mieszanki: $70 \cdot 30 = 2100$ zł.

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 60x + 90y = 2100 \end{cases}; \; 60x + 2700 - 90x = 2100,\; 30x = 600,\; x = 20,\; y = 10.$$

Odpowiedź: 20 kg kawy po 60 zł i 10 kg kawy po 90 zł. Sprawdzenie: $1200 + 900 = 2100$.

Przykład 4. Jak uzasadnić jedyność przy metodzie prób? Sprzedano 100 biletów: normalne po 20 zł i ulgowe po 12 zł, za łącznie 1520 zł. Ile było biletów normalnych?
Próba: 40 normalnych i 60 ulgowych: 800 + 720 = 1520 – pasuje.
Uzasadnienie jedyności: zamiana jednego biletu ulgowego na normalny zwiększa wpływy o 20 − 12 = 8 zł, więc każdej liczbie biletów normalnych odpowiada inna kwota – 1520 zł daje tylko 40 biletów normalnych. Bez tego zdania: najwyżej 1 pkt z 2.

Przykład 5. (zamknięte) Ile rozwiązań ma układ $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ -4x + 6y = 12 \end{cases}$**?**
Mnożymy pierwsze równanie przez 2 i dodajemy do drugiego: 0 = 24 – sprzeczność. Układ nie ma rozwiązań: proste $y = \frac{2}{3}x - 2$ i $y = \frac{2}{3}x + 2$ są równoległe i różne.

ZADANIA

Zadanie 1. Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego. ___ / 4 pkt

1. cena towaru po obniżce ceny x o 15%: _____
2. 12% kwoty y: _____
3. masa soli w x g solanki o stężeniu 8%: _____
4. liczba o 40% większa od z: _____

Zadanie 2. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x + y = 12 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ **jest para liczb** ___ / 1 pkt

A. $x = 4$, $y = 8$
B. $x = 5$, $y = 7$
C. $x = 5$, $y = -7$
D. $x = 7$, $y = 5$

Zadanie 3. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 2 pkt

1. Układ $\begin{cases} y = 4x - 1 \\ y = 4x + 3 \end{cases}$ nie ma rozwiązań.	**P**	**F**
2. Układ $\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - 3y = 3 \end{cases}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.	**P**	**F**

Zadanie 4. Suma dwóch liczb jest równa 50, a pierwsza z nich jest o 8 większa od drugiej. Układem równań opisującym tę sytuację jest ___ / 1 pkt

A. $\begin{cases} x + y = 50 \\ x = y + 8 \end{cases}$
B. $\begin{cases} x - y = 50 \\ x = y + 8 \end{cases}$
C. $\begin{cases} x + y = 50 \\ x = 8y \end{cases}$
D. $\begin{cases} x + y = 50 \\ y = x + 8 \end{cases}$

PIERWSZA ŁAWKA

A. Zadania wprowadzające – Układy równań liniowych i zadania tekstowe

KARTA 2/6

Proste ćwiczenia umiejętności z tematu

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 25 pkt

Zadanie 1. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$ jest para liczb ___ / 1 pkt

A. $x = 5, y = 2$ **B.** $x = 4, y = -3$

C. $x = 4, y = 3$ **D.** $x = 3, y = 4$

Zadanie 2. Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego. ___ / 3 pkt

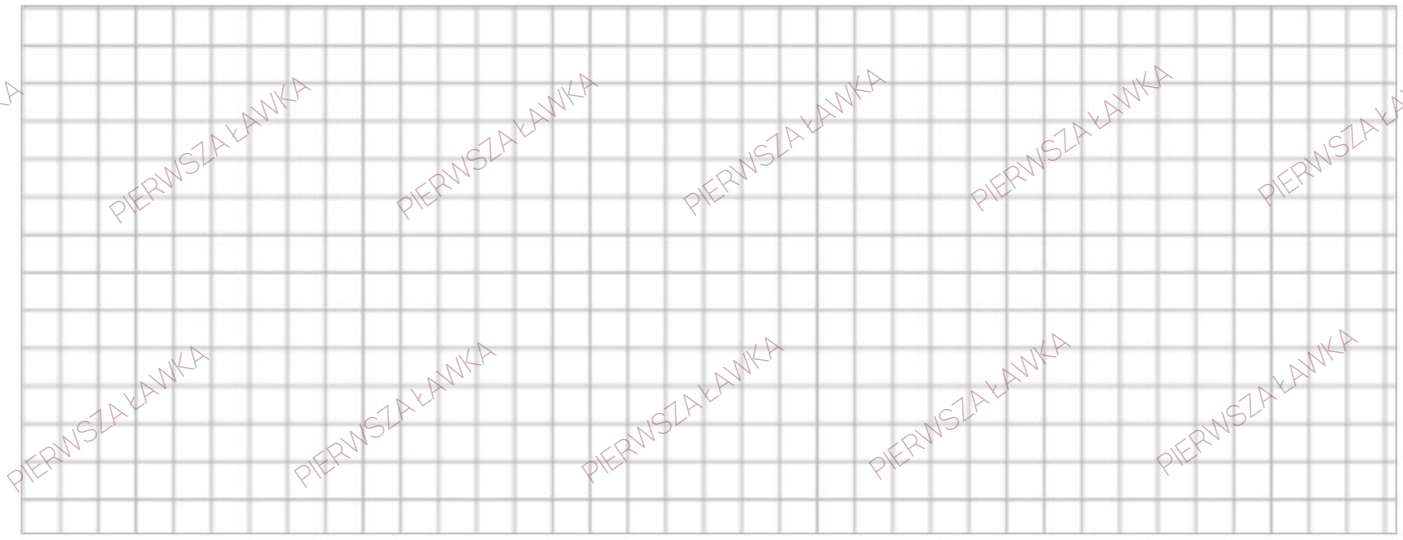
1. liczba o 20% większa od x: _____
2. 15% liczby y: _____
3. liczba o 30% mniejsza od z: _____

Zadanie 3. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 3 pkt

1. Układ $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.	**P**	**F**
2. Układ $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$ jest nieoznaczony.	**P**	**F**
3. Proste $y = x$ i $y = -x + 4$ przecinają się w punkcie (2, 2).	**P**	**F**

Zadanie 4. Rozwiąż układy równań.

a) $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$ **(metodą podstawiania)** **b)** $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 3y = 15 \end{cases}$ **(metodą przeciwnych współczynników)** ___ / 3 pkt



Zadanie 5. Dopasuj do każdego układu równań (1–4) liczbę jego rozwiązań (a–c). ___ / 4 pkt

1. $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x - y = 2 \\ x - y = 5 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$
4. $\begin{cases} y = -x + 1 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases}$

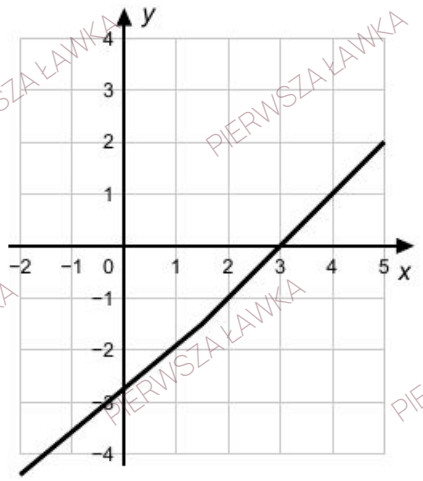
a) dokładnie jedno rozwiązanie

b) brak rozwiązań

c) nieskończenie wiele rozwiązań

1 ____ 2 ____ 3 ____ 4 ____

Zadanie 6. Na rysunku przedstawiono dwie proste. Wskaż układ równań, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku. ___ / 1 pkt



A. $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -2x - 3 \end{cases}$

B. $\begin{cases} y = -x - 3 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} y = x - 3 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$

D. $\begin{cases} y = x - 3 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$

Zadanie 7. Za 3 zeszyty i 2 długopisy zapłacono 17,50 zł, a za 2 takie zeszyty i 5 takich długopisów – 19 zł. Oblicz cenę jednego zeszytu i cenę jednego długopisu. ___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 8. Telefon i słuchawki kosztowały razem 1600 zł. Po obniżce ceny telefonu o 15% i ceny słuchawek o 25% za oba produkty trzeba zapłacić 1340 zł. Oblicz cenę telefonu przed obniżką.

___ / 2 pkt

Zadanie 9. Pierwsze równanie układu ma postać $x + 2y = 4$, a drugie $– 3x + ay = 7$. Uzupełnij zdanie.

___ / 1 pkt

1. Układ jest sprzeczny, gdy liczba a jest równa _____ .

Zadanie 10. Suma dwóch liczb naturalnych jest równa 56. Przy dzieleniu większej z nich przez mniejszą otrzymujemy iloraz 3 i resztę 4. Wyznacz te liczby. Zapisz obliczenia.

___ / 2 pkt

Zadanie 11. Zmieszano roztwór soli o stężeniu 10% z roztworem soli o stężeniu 25% i otrzymano 600 g roztworu o stężeniu 15%. Oblicz, ile gramów każdego roztworu użyto. Zapisz obliczenia.

___ / 3 pkt

PIERWSZA ŁAWKA

A. Zadania wprowadzające – trening: Układy równań i zadania tekstowe

Zadania krok po kroku

KARTA 3/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 13 pkt

Zadanie 1. W dwóch klasach jest łącznie 58 uczniów. Na wycieczkę pojechało 75% uczniów klasy pierwszej i 60% uczniów klasy drugiej – razem 39 osób. Niech x i y oznaczają liczby uczniów odpowiednio klasy pierwszej i drugiej. Sytuację opisuje układ ___ / 1 pkt

A. $\begin{cases} x + y = 39 \\ 0{,}75x + 0{,}6y = 58 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x + y = 58 \\ 0{,}75x + 0{,}6y = 0{,}39 \cdot 58 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x + y = 58 \\ 0{,}75x + 0{,}6y = 39 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x + y = 58 \\ 0{,}25x + 0{,}4y = 39 \end{cases}$

Zadanie 2. Za 4 bilety normalne i 3 ulgowe do kina zapłacono 162 zł, a za 2 bilety normalne i 5 ulgowych – 144 zł. Oblicz cenę biletu ulgowego. ___ / 2 pkt

Zadanie 3. Uzupełnij zdanie. ___ / 1 pkt

1. Układ równań $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ ax - 3y = 5 \end{cases}$ jest sprzeczny, gdy liczba a jest równa _____ .

Zadanie 4. Ile litrów wody trzeba dolać do 12 litrów soku o zawartości 30% soku owocowego, aby otrzymać napój o zawartości 20% soku owocowego? ___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 5. Premię w wysokości 7200 zł podzielono między dwie osoby tak, że pierwsza dostała o 40% więcej niż druga. Oblicz obie kwoty. ___ / 2 pkt

Zadanie 6. Dany jest układ równań $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - y = 5 \end{cases}$ **. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).** ___ / 2 pkt

1. Para $x = 3$, $y = -2$ jest rozwiązaniem tego układu.	**P**	**F**
2. Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.	**P**	**F**

Zadanie 7. W dwóch zbiornikach jest łącznie 1600 litrów wody. Gdy z pierwszego zbiornika przelano do drugiego 20% zawartości pierwszego, w obu zbiornikach było tyle samo wody. Oblicz, ile wody było na początku w każdym zbiorniku. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

B. Zadania maturalne – Układy równań liniowych i zadania tekstowe

KARTA 4/6

Polecenia i punktacja jak na maturze 2027

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 45 pkt

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

___ / 1 pkt

Układ równań $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ -6x + 2y = -8 \end{cases}$

A. ma dokładnie jedno rozwiązanie.

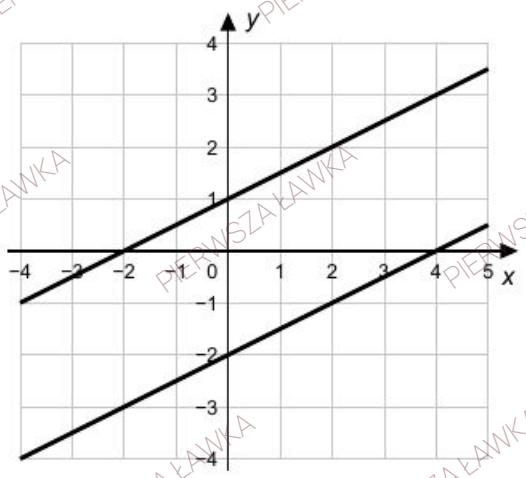
B. nie ma rozwiązań.

C. ma dokładnie dwa rozwiązania.

D. ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Zadanie 2. Na rysunku przedstawiono dwie proste równoległe.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Układ równań, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku, to

___ / 1 pkt



A. $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

Zadanie 3. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Punkt przecięcia prostych o równaniach $2x + y = 1$ i $x - y = 5$ ma współrzędne

___ / 1 pkt

A. $(2, -3)$ **B.** $(3, -2)$ **C.** $(-3, 2)$ **D.** $(2, 3)$

PIERWSZA ŁAWKA

Zadanie 4. Dany jest układ równań $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Para liczb $x = 4$, $y = 1$ jest rozwiązaniem tego układu.	**P**	**F**
2. Proste opisane równaniami tego układu przecinają się w punkcie leżącym na osi Ox.	**P**	**F**

Zadanie 5. Dany jest układ równań $\begin{cases} x = 2y - 1 \\ 3x - 4y = 5 \end{cases}$.

Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe. ___ / 2 pkt

1. Liczba x spełniająca ten układ jest równa _____ .
2. Liczba y spełniająca ten układ jest równa _____ .

Zadanie 6. Fundacja przekazała dwóm schroniskom dla zwierząt łącznie 84 000 zł. Po trzech miesiącach pierwsze schronisko wydało 35% otrzymanej kwoty, a drugie – 20% otrzymanej kwoty. Oba schroniska wydały w tym czasie łącznie 22 200 zł. Oblicz kwotę, którą otrzymało pierwsze schronisko. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 7. Kilogram gruszek jest o 40% droższy od kilograma jabłek. Za 3 kg jabłek i 2 kg gruszek zapłacono 23,20 zł. Oblicz cenę kilograma jabłek. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Matura 2027 z matematyki (poziom podstawowy) – zbiór zadań, rozdział 3: Układy równań i zadania tekstowe, z odpowiedziami

Podgląd pokazał 11 z 34 stron. Pełna wersja: 34 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Rozdział 3. Układy równań i zadania tekstowe – repetytorium – 4 zadania, 8 pkt
- A. Zadania wprowadzające – Układy równań liniowych i zadania tekstowe – 11 zadań, 25 pkt
- A. Zadania wprowadzające – trening: Układy równań i zadania tekstowe – 7 zadań, 13 pkt
- B. Zadania maturalne – Układy równań liniowych i zadania tekstowe – 25 zadań, 45 pkt
- B. Zadania maturalne – Układy równań i zadania tekstowe – 13 zadań, 21 pkt
- C. Zadania trudniejsze – Układy równań i zadania tekstowe – 5 zadań, 10 pkt Na końcu: klucz do zadań zamkniętych, przykładowe pełne rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych (

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matematyka-matura-pp-zbior-zadan-rozdzial-03-uklady-rownan-zadania-tekstowe