PIERWSZA ŁAWKA · ZESTAW DZIAŁOWY · MATEMATYKA · KLASA 1 LO I TECHNIKUM · ZAKRES PODSTAWOWY

Dział 4. Wyrażenia algebraiczne i dowody podzielności

Mnożenie sum, wzory skróconego mnożenia drugiego stopnia, wyłączanie jednomianu przed nawias, wartości wyrażeń z pierwiastkami, zapis liczb parzystych, nieparzystych i z resztą, dowody podzielności i reszt z dzielenia. Dziewięć kart: teoria z przykładami, ćwiczenia, zadania typu maturalnego, dwie kartkówki (A i B) i sprawdzian (A i B) – z kluczem i zasadami oceniania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Wyrażenia algebraiczne i dowody podzielności – najważniejsze wiadomości** Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka	3 zad. 8 pkt
2	**Wyrażenia algebraiczne i dowody podzielności – ćwiczenia** Ćwiczę umiejętności z działu	8 zad. 21 pkt
3	**Wyrażenia algebraiczne i dowody podzielności – zadania typu maturalnego** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	7 zad. 10 pkt
4	**Kartkówka 1: wzory skróconego mnożenia i działania na wyrażeniach – grupa A** 15 minut · 9 pkt	4 zad. 9 pkt
5	**Kartkówka 1: wzory skróconego mnożenia i działania na wyrażeniach – grupa B** 15 minut · 9 pkt	4 zad. 9 pkt
6	**Kartkówka 2: dowody podzielności i reszt – grupa A** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
7	**Kartkówka 2: dowody podzielności i reszt – grupa B** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
8	**Sprawdzian: Wyrażenia algebraiczne i dowody podzielności – grupa A** 45 minut · 20 pkt	10 zad. 20 pkt
9	**Sprawdzian: Wyrażenia algebraiczne i dowody podzielności – grupa B** 45 minut · 20 pkt	10 zad. 20 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 przypomina najważniejsze wiadomości z działu i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku – od niej warto zacząć.
- Karta 2 to ćwiczenia, a karta 3 – zadania w formule matury 2027 (polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE).
- Karty 4–7 to dwie kartkówki (po 15 minut), każda w grupach A i B. Karty 8–9 to sprawdzian (45 minut) w grupach A i B – te same typy zadań i ta sama punktacja, inne liczby.
- Klucz na końcu zestawu zawiera odpowiedzi, przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE (kamienie milowe, błąd rachunkowy = −1 pkt).
- Osobny plik „Powtórka" zbiera definicje, wzory (z zaznaczeniem, które są w karcie wzorów CKE), typowe błędy i test „Sprawdź się".

Materiał oryginalny. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: I.2, II.1–II.3; cele ogólne I, II.2, IV.1. Miejsce w seriach podręczników: NE kl. 1 („Język matematyki") · Pazdro kl. 1 · GWO kl. 1 (dowody podzielności wracają w powtórce maturalnej). Nazwy wydawnictw i serii podano tylko informacyjnie – materiał nie jest z nimi powiązany. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

PIERWSZA ŁAWKA

Wyrażenia algebraiczne i dowody podzielności – najważniejsze wiadomości

Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka

KARTA 1/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Jednomian** to iloczyn liczby i zmiennych (np. $-3x^2y$), **suma algebraiczna** – suma jednomianów. **Wyrazy podobne** różnią się najwyżej współczynnikiem liczbowym ($5ab$ i $-2ab$) – tylko je redukujemy: $5ab - 2ab = 3ab$.
- **Mnożenie sum:** każdy wyraz pierwszej sumy mnożymy przez każdy wyraz drugiej: $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$. Minus przed nawiasem zmienia znaki wszystkich wyrazów w nawiasie: $-(2x - 5) = -2x + 5$.
- **Wzory skróconego mnożenia:** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Czytaj je w obie strony: $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$.
- Wzory skróconego mnożenia są w „Wybranych wzorach matematycznych” CKE (dział 6 karty). Wzory na sześciany i potęgi n-te z tej karty obowiązują tylko w zakresie rozszerzonym.
- **Wyłączanie przed nawias:** bierzemy największy wspólny dzielnik współczynników i wspólne zmienne w najniższych potęgach: $6x^2y - 9xy^2 = 3xy(2x - 3y)$. Sprawdzenie: wymnóż – musisz otrzymać wyrażenie wyjściowe.
- **Zapis liczb całkowitych** ($k \in \mathbb{Z}$): parzysta $2k$, nieparzysta $2k + 1$, kolejne liczby n, $n + 1$, $n + 2$; liczba dająca resztę r z dzielenia przez m to $mk + r$, gdzie $0 \le r < m$. Dwie *dowolne* liczby nieparzyste to $2k + 1$ i $2l + 1$ (dwie różne litery).
- **Przydatne fakty:** iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest parzysty; wśród trzech kolejnych liczb całkowitych jedna dzieli się przez 3 i co najmniej jedna jest parzysta, więc ich iloczyn dzieli się przez 6 (liczba podzielna przez 2 i przez 3 dzieli się przez 6).
- **Dowód podzielności – schemat:** 1) zapisz założenia symbolami (np. $n = 2k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$); 2) przekształć wyrażenie do postaci $m \cdot (\ldots)$; 3) napisz zdanie zamykające: „ponieważ $k \in \mathbb{Z}$, to liczba w nawiasie jest całkowita, więc wyrażenie jest podzielne przez m”; 4) zakończ: „To należało wykazać.”. Sprawdzenie dla kilku liczb **nie jest dowodem** – na maturze daje 0 punktów.
- **Reszta z dzielenia** przez m spełnia $0 \le r < m$. Jeśli otrzymasz $3q - 1$, zapisz $3q - 1 = 3(q - 1) + 2$ – reszta jest równa 2, a nie -1.

Podgląd • Pierwsza Ławka

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. Przekształć wyrażenie $(2x - 3y)^2 - (x + y)(x - y)$ do postaci sumy algebraicznej.

$(2x - 3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$ (uwaga: $(2x)^2 = 4x^2$ oraz $2 \cdot 2x \cdot 3y = 12xy$).

$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$.

Odejmujemy (nawias po minusie!): $4x^2 - 12xy + 9y^2 - (x^2 - y^2) = 3x^2 - 12xy + 10y^2$.

Przykład 2. Wyłącz przed nawias jak największy jednomian: $12a^3b - 18a^2b^2 + 6a^2b$.

Największy wspólny dzielnik liczb 12, 18, 6 to 6; wspólne zmienne w najniższych potęgach: a^2 i b.

$12a^3b - 18a^2b^2 + 6a^2b = 6a^2b(2a - 3b + 1)$.

Sprawdzenie: $6a^2b \cdot 2a = 12a^3b$, $6a^2b \cdot (-3b) = -18a^2b^2$, $6a^2b \cdot 1 = 6a^2b$.

Przykład 3. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $(n + 3)^2 - (n - 1)^2$ jest podzielna przez 8.

Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów:

$(n + 3)^2 - (n - 1)^2 = [(n + 3) - (n - 1)] \cdot [(n + 3) + (n - 1)] = 4 \cdot (2n + 2) = 8(n + 1)$.

Ponieważ $n \in \mathbb{Z}$, to $n + 1 \in \mathbb{Z}$, więc liczba $8(n + 1)$ jest podzielna przez 8. To należało wykazać.

Drugi sposób: rozwijamy oba kwadraty: $n^2 + 6n + 9 - n^2 + 2n - 1 = 8n + 8 = 8(n + 1)$.

Przykład 4. Wykaż, że suma kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych przy dzieleniu przez 8 daje resztę 2.

Kolejne liczby nieparzyste to $2k + 1$ i $2k + 3$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

$(2k + 1)^2 + (2k + 3)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4k^2 + 12k + 9 = 8k^2 + 16k + 10 = 8(k^2 + 2k + 1) + 2$.

Liczba $k^2 + 2k + 1$ jest całkowita i $0 \leq 2 < 8$, więc reszta z dzielenia przez 8 jest równa 2. To należało wykazać.

ZADANIA

Zadanie 1. Przekształć do postaci sumy algebraicznej. ___ / 4 pkt

1. $(x + 5)^2 =$ _____
2. $(3a - 1)^2 =$ _____
3. $(y - 4)(y + 4) =$ _____
4. $2x(3x - y) =$ _____

Zadanie 2. Wyrażenie $x^2 - 49$ jest równe ___ / 1 pkt

A. $(x - 7)(x + 7)$ **B.** $(x - 7)^2$ **C.** $(x + 7)^2$ **D.** $(x - 49)(x + 49)$

Zadanie 3. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 3 pkt

1. Dla każdej liczby całkowitej k liczba $2k + 1$ jest nieparzysta.	**P**	**F**
2. Dla dowolnych liczb a, b zachodzi równość $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.	**P**	**F**
3. Iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest liczbą parzystą.	**P**	**F**

Wyrażenia algebraiczne i dowody podzielności – ćwiczenia

KARTA 2/9

Ćwiczę umiejętności z działu

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 21 pkt

Zadanie 1. Wymnóż i zredukuj wyrazy podobne. ___ / 4 pkt

1. $(2x + 3)(x - 4) =$ _____
2. $(a - 2b)(3a + b) =$ _____
3. $(x - 2)(x^2 + 3x - 1) =$ _____
4. $3x(x - y) - 2y(x + y) =$ _____

Zadanie 2. Wyłącz przed nawias jak największy jednomian. ___ / 3 pkt

1. $8x^2y - 12xy^2 =$ _____
2. $15a^3 + 10a^2 - 5a =$ _____
3. $9m^2n^3 - 6mn^2 =$ _____

Zadanie 3. Dopasuj do każdego wyrażenia (1–4) jego postać iloczynową (a–e). Jedna postać nie pasuje do żadnego wyrażenia. ___ / 4 pkt

1. $x^2 - 6x + 9$
2. $x^2 - 9$
3. $x^2 + 6x + 9$
4. $9x^2 - 1$

a) $(x + 3)^2$
b) $(3x - 1)(3x + 1)$
c) $(x - 3)^2$
d) $(3 - x)(3 + x)$
e) $(x - 3)(x + 3)$

1 ____ 2 ____ 3 ____ 4 ____

Zadanie 4. Liczba $(\sqrt{5} + 2)^2 - (\sqrt{5} - 2)^2$ jest równa ___ / 1 pkt

A. $4\sqrt{5}$ **B.** 18 **C.** $8\sqrt{5}$ **D.** 0

Zadanie 5. Oceń, czy równość jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych (P), czy nie (F). ___ / 3 pkt

1. $(2x - 1)^2 = 4x^2 - 1$	**P**	**F**
2. $-(a - b) = b - a$	**P**	**F**
3. $x^2 - 4x + 4 = (2 - x)^2$	**P**	**F**

Podgląd • Pierwsza Ławka

Wyrażenia algebraiczne i dowody podzielności – zadania typu maturalnego

Polecenia i punktacja jak na maturze 2027

KARTA 3/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 10 pkt

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla każdej liczby rzeczywistej x wyrażenie $(3x - 2)^2 - (3x + 2)(3x - 2)$ jest równe ___ / 1 pkt

A. 8 **B.** $-12x + 8$ **C.** $18x^2 - 12x$ **D.** $-12x$

Zadanie 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $(2\sqrt{3} - 1)^2$ jest równa ___ / 1 pkt

A. $13 - 4\sqrt{3}$ **B.** 11 **C.** $13 - 2\sqrt{3}$ **D.** $7 - 4\sqrt{3}$

Zadanie 3. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest równość $(a - b)^2 = (b - a)^2$.	**P**	**F**
2. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest równość $(a + 2b)^2 = a^2 + 2ab + 4b^2$.	**P**	**F**

Zadanie 4. Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe. ___ / 2 pkt

1. Po wyłączeniu przed nawias jednomianu $5x^2y$ otrzymujemy $20x^3y - 15x^2y^2 = 5x^2y \cdot ($ _____ $\cdot x - 3y)$.
2. Dla $x = \sqrt{2} + 3$ wartość wyrażenia $x^2 - 6x + 9$ jest równa _____ .

Zadanie 5. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $101^2 - 99^2$ jest równa ___ / 1 pkt

A. $20\,000$ **B.** 4 **C.** 200 **D.** 400

PIERWSZA ŁAWKA

Kartkówka 1: wzory skróconego mnożenia i działania na wyrażeniach – grupa A

15 minut · 9 pkt

KARTA 4/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 9 pkt

Zadanie 1. Przekształć do postaci sumy algebraicznej. ___ / 4 pkt

1. $(x-6)^2 =$ _____
2. $(2a+5)^2 =$ _____
3. $(3y-2)(3y+2) =$ _____
4. $(x+2)(x-5) =$ _____

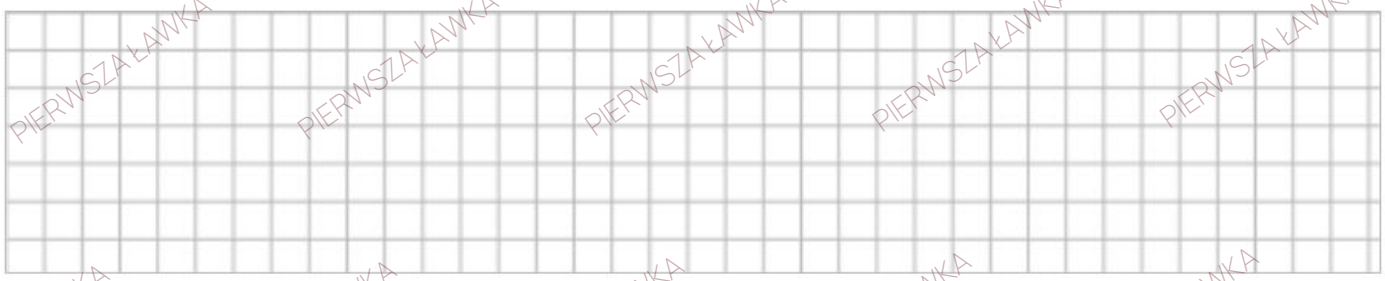
Zadanie 2. Dla każdej liczby rzeczywistej x wyrażenie $(x-4)^2 - x(x-8)$ jest równe ___ / 1 pkt

A. -16 **B.** 16 **C.** $2x^2 - 16x + 16$ **D.** $16 - 16x$

Zadanie 3. Wyłącz przed nawias jak największy jednomian. ___ / 2 pkt

1. $14x^2y - 21xy =$ _____
2. $6a^3 - 9a^2 + 3a =$ _____

Zadanie 4. Oblicz wartość wyrażenia $(a+3)^2 - (a-3)^2$ dla $a = \sqrt{7}$. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt



Podgląd • Pierwsza Ławka

Sprawdzian: Wyrażenia algebraiczne i dowody podzielności – grupa A

45 minut · 20 pkt

KARTA 8/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 20 pkt

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $(\sqrt{6}-2)^2$ jest równa ___ / 1 pkt

A. 2 **B.** $10-2\sqrt{6}$ **C.** $10-4\sqrt{6}$ **D.** $2-4\sqrt{6}$

Zadanie 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y wyrażenie $(x+2y)^2-(x-2y)^2$ jest równe ___ / 1 pkt

A. 0 **B.** $8xy$ **C.** $2x^2+8y^2$ **D.** $4xy$

Zadanie 3. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. $x^2-16x+64=(8-x)^2$ dla każdej liczby rzeczywistej x.	**P**	**F**
2. $4a^2-9=(4a-3)(4a+3)$ dla każdej liczby rzeczywistej a.	**P**	**F**

Zadanie 4. Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe. ___ / 2 pkt

1. $12a^2b-8ab^2+4ab=4ab\cdot(_____\cdot a-2b+1)$.
2. $(2x-1)(x+3)=2x^2+(_____)\cdot x-3$.

Zadanie 5. Uprość wyrażenia. ___ / 4 pkt

1. $(x-3)^2+(x+3)^2=$ _____
2. $(2a-b)(2a+b)-4a^2=$ _____
3. $(x+1)(x-2)-(x-1)^2=$ _____
4. $(2x+1)^2-4x(x+1)=$ _____

Zadanie 6. Liczby x i y spełniają warunki $x-y=3$ oraz $xy=5$. Oblicz x^2+y^2. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Wyrażenia algebraiczne i dowody podzielności – kartkówki, sprawdzian i karty pracy z powtórką, matematyka, klasa 1 LO i technikum (zakres

Podgląd pokazał 8 z 25 stron. Pełna wersja: 25 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Wyrażenia algebraiczne i dowody podzielności – najważniejsze wiadomości – 3 zadania, 8 pkt
- Karta 2: Wyrażenia algebraiczne i dowody podzielności – ćwiczenia – 8 zadań, 21 pkt
- Karta 3: Wyrażenia algebraiczne i dowody podzielności – zadania typu maturalnego – 7 zadań, 10 pkt
- Karta 4: Kartkówka 1: wzory skróconego mnożenia i działania na wyrażeniach – grupa A – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 5: Kartkówka 1: wzory skróconego mnożenia i działania na wyrażeniach – grupa B – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 6: Kartkówka 2: dowody podzielności i reszt – grupa A – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 7: Kartkówka 2: dowody podzielności i reszt – grupa B – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 8: Sprawdzian: Wyrażenia algebraiczne i dowody podzielności – grupa A – 10 zadań, 20 pkt
- Karta 9: Sprawdzian: Wyrażenia algebraiczne i dowody podzielności – grupa B – 10 zadań, 20 pkt Karta 1 przypomina teorię i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku.

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matematyka-liceum-klasa-1-dzial-04-wyrazenia-algebraiczne-i-dowody-podzielnosci