PIERWSZA ŁAWKA · ZBIÓR ZADAŃ MATURALNYCH · PP · MATEMATYKA · MATURA 2027 · POZIOM PODSTAWOWY

Rozdział 8. Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne

Kąty wpisane i środkowe, wielokąty foremne, trójkąt równoboczny i punkty szczególne trójkąta (promienie okręgów wpisanego i opisanego, środek ciężkości), twierdzenie Talesa, trójkąty podobne i skala pól, dowody geometryczne za 2 i 3 punkty z zasadami oceniania jak w arkuszach CKE 2026 – zadania 19–24 arkusza podstawowego. 143 zadań maturalnych z matematyki (poziom podstawowy) w trzech sekcjach: wprowadzające, maturalne i trudniejsze, z repetytorium, wzorcowymi rozwiązaniami i kluczem z zasadami oceniania w stylu CKE.

Karta	Temat	Zadania
1	**Rozdział 8. Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne – repetytorium** Najważniejsze wiadomości, wzorcowe rozwiązania, jak oceni to CKE	4 zad. 6 pkt
2	**A. Zadania wprowadzające – Planimetria: trójkąty, twierdzenie Talesa, podobieństwo** Proste ćwiczenia umiejętności z tematu	12 zad. 26 pkt
3	**A. Zadania wprowadzające – Planimetria: okręgi, kąty w okręgu, wielokąty** Proste ćwiczenia umiejętności z tematu	11 zad. 30 pkt
4	**A. Zadania wprowadzające – Planimetria: twierdzenie cosinusów, pola, punkty szczególne, dowody geometryczne** Proste ćwiczenia umiejętności z tematu	11 zad. 31 pkt
5	**A. Zadania wprowadzające – trening: Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne** Zadania krok po kroku	7 zad. 12 pkt
6	**B. Zadania maturalne – Planimetria: trójkąty, twierdzenie Talesa, podobieństwo** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	25 zad. 47 pkt
7	**B. Zadania maturalne – Planimetria: okręgi, kąty w okręgu, wielokąty** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	26 zad. 47 pkt

8	**B. Zadania maturalne – Planimetria: twierdzenie cosinusów, pola, punkty szczególne, dowody geometryczne** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	26 zad. 48 pkt
9	**B. Zadania maturalne – Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne** Na poziomie arkuszy CKE 2025–2026	15 zad. 22 pkt
10	**C. Zadania trudniejsze – Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne** Nietypowe ujęcia i zadania wieloetapowe	6 zad. 13 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Rozdział zaczyna się od repetytorium: najważniejsze wiadomości, wzorcowe rozwiązania krok po kroku i to, jak CKE ocenia ten typ zadań.
- Sekcja A to zadania wprowadzające, sekcja B – zadania maturalne (formuły poleceń i punktacja jak w arkuszach CKE), sekcja C – zadania trudniejsze.
- Na końcu jest klucz: odpowiedzi, przykładowe pełne rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE.
- Osobny plik „Powtórka” zbiera wzory (z podziałem: są w karcie wzorów / trzeba pamiętać), typowe błędy i test „Sprawdź się”.

Materiał oryginalny – żadne zadanie nie jest kopią zadania CKE. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: VIII.1–VIII.12; cele ogólne IV.1, IV.4. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

Rozdział 8. Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne – repetytorium

Najważniejsze wiadomości, wzorcowe rozwiązania, jak oceni to CKE

KARTA 1/10

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 6 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Gdzie w arkuszu.** Planimetria (dział VIII) to zadania 19–24 arkusza PP. Kąty wpisane i środkowe są w każdym arkuszu 2023–2026 (zadanie zamknięte, 1 pkt), podobieństwo i Tales – w 3 z 4 (w 2023 r. otwarte za 2 pkt – 75% poprawnych rozwiązań), trójkąt i punkty szczególne – w 3 z 4. W 2026 r. doszły dwa zadania, które rozwiązało tylko 27% zdających: **dowód geometryczny** za 2 pkt (zad. 21) i luka o trójkącie równobocznym wpisanym w okrąg (zad. 22). W próbnej maturze z marca 2026 r. dowód geometryczny był za 3 pkt.
- **Kąty w okręgu.** Kąt wpisany jest połową kąta środkowego opartego na tym samym łuku. Kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe. Kąt wpisany oparty na półokręgu jest prosty. Najpierw ustal, **na którym łuku** opiera się kąt: gdy wierzchołek kąta wpisanego leży na krótszym łuku AB, kąt jest połową kąta środkowego wklęsłego (360° minus kąt AOB). Trójkąt AOB, gdzie O jest środkiem okręgu, jest równoramienny, bo $|OA| = |OB| = r$.
- **Trójkąt równoboczny i wielokąty foremne.** Dla boku a: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, promień okręgu opisanego $R = \frac{2}{3}h$, wpisanego $r = \frac{1}{3}h$ (środki obu okręgów leżą w środku ciężkości). Promień okręgu opisanego to **nie** wysokość ani bok – to najczęstszy błąd w zadaniu 22 z 2026 r. Kąt wewnętrzny n-kąta foremnego ma miarę $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$. Sześciokąt foremny o boku a składa się z sześciu trójkątów równobocznych: dłuższa przekątna ma długość $2a$, krótsza $a\sqrt{3}$.
- **Punkty szczególne trójkąta.** Środek okręgu opisanego – punkt przecięcia symetralnych boków; w trójkącie prostokątnym to środek przeciwprostokątnej ($R = \frac{c}{2}$). Środek okręgu wpisanego – punkt przecięcia dwusiecznych kątów ($r = \frac{2P}{a+b+c}$, w trójkącie prostokątnym także $r = \frac{a+b-c}{2}$). Środek ciężkości – punkt przecięcia środkowych; dzieli każdą środkową w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka. Ortocentrum – punkt przecięcia prostych zawierających wysokości.
- **Tales i podobieństwo.** Jeśli punkty D i E leżą na bokach AC i BC oraz $DE \parallel AB$, to trójkąty CDE i CAB są podobne (cecha kkk: kąt C wspólny, kąty odpowiadające przy prostych równoległych). Skala k to stosunek $|CD|$ do **całego** boku $|CA|$, a nie do $|DA|$. Obwody figur podobnych są w stosunku k, pola – w stosunku k^2. Cechy podobieństwa: bbb, bkb, kkk; cechy przystawania: bbb, bkb, kbk – cechy przystawania „kkk” nie ma.

- **Dowód geometryczny – wzorzec zapisu.** 1) Rysunek z oznaczeniami; każdą nową literę opisz słowami (np. „*h* – wysokość trójkątów *KLM* i *KMN* poprowadzona z wierzchołka *K*”). 2) Oznacz kąty literami (α, β) i przy każdej równości podaj powód: dwusieczna, kąty naprzemianległe, wierzchołkowe, wpisane oparte na tym samym łuku, promienie tego samego okręgu. 3) Przystawanie i podobieństwo – z nazwą cechy. 4) Nie przyjmuj szczególnych przypadków (kąt prosty, trójkąt równoramienny, konkretne długości) i niczego „z rysunku”. 5) Zakończ zdaniem „To należało wykazać.” – wynik pośredni to jeszcze nie teza.

Zadanie	Punktacja CKE	Za co zero
dowód za 2 pkt (matura 2026, zad. 21)	1 pkt – jeden kluczowy związek, np. pola obu trójkątów zapisane z tą samą, opisaną wysokością ALBO uzasadnienie równości wysokości; 2 pkt – pełne rozumowanie	wysokość „*h*” bez opisu; konkretna miara kąta; sprawdzenie na przykładzie
dowód za 3 pkt (próbna 2026, zad. 21)	1 pkt – pierwszy fakt (np. trójkąt równoramienny z uzasadnieniem); 2 pkt – kluczowe długości wyrażone przez jedną zmienną; 3 pkt – pełne rozumowanie	jak wyżej; fakt przyjęty „z rysunku” – najwyżej 1 pkt
zamknięte i „wpisz” (1 pkt)	kąty w okręgu, Tales, skala podobieństwa, trójkąt równoboczny	zaokrąglenia w „wpisz” nie są akceptowane

- **Pułapki.** Promień a średnica; skala *k* a stosunek pól k^2; kąt wpisany oparty na dłuższym albo krótszym łuku; skala liczona względem części boku zamiast całego boku; „dwusieczna dzieli trójkąt na dwa trójkąty o równych polach” (nieprawda – to środkowa); odcinek na dwusiecznej wzięty za wysokość (wszystkie trzy – ze sprawozdania z matury 2026).

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. (zadanie zamknięte, 1 pkt) Punkty *A*, *B*, *C* leżą na okręgu o środku *O*, punkt *C* leży na dłuższym łuku *AB* i $|\sphericalangle ACB| = 38°$. Oblicz miarę kąta *OAB*.

Kąt środkowy *AOB* jest oparty na tym samym łuku co kąt wpisany *ACB*, więc $|\sphericalangle AOB| = 2 \cdot 38° = 76°$.

Trójkąt *AOB* jest równoramienny ($|OA| = |OB|$ – promienie), więc

$$|\sphericalangle OAB| = \frac{180° - 76°}{2} = 52°.$$

Przykład 2. (zadanie „wpisz”, 2 pkt) W okrąg o promieniu 6 wpisano trójkąt równoboczny. Oblicz długość boku tego trójkąta i promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Promień okręgu opisanego to $\frac{2}{3}$ wysokości: $6 = \frac{2}{3}h$, więc $h = 9$.

Z wzoru $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$: $a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$. Promień okręgu wpisanego: $r = \frac{1}{3}h = 3$.

Najczęstszy błąd (matura 2026, zad. 22 – 27% poprawnych): przyjęcie, że promień okręgu opisanego jest równy wysokości albo bokowi.

A. Zadania wprowadzające – Planimetria: trójkąty, twierdzenie Talesa, podobieństwo

KARTA 2/10

Proste ćwiczenia umiejętności z tematu

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 26 pkt

Zadanie 1. Określ rodzaj trójkąta o podanych długościach boków (ostrokątny, prostokątny, rozwartokątny). ___ / 3 pkt

1. 8, 15, 17: _____
2. 4, 5, 7: _____
3. 5, 6, 7: _____

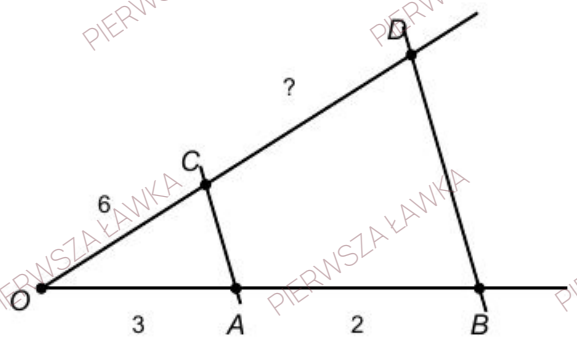
Zadanie 2. Trójkąty T_1 i T_2 są podobne, a skala podobieństwa trójkąta T_2 do T_1 jest równa 3. Pole trójkąta T_1 jest równe 5. Pole trójkąta T_2 jest równe ___ / 1 pkt

A. 135 **B.** 45 **C.** 15 **D.** 30

Zadanie 3. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 3 pkt

1. Istnieje trójkąt o bokach 2, 3 i 6.	**P**	**F**
2. W trójkącie o kątach 40°, 60°, 80° najdłuższy bok leży naprzeciw kąta 80°.	**P**	**F**
3. Każde dwa trójkąty równoboczne są podobne.	**P**	**F**

Zadanie 4. Proste *AC* i *BD* są równoległe (zobacz rysunek), $|OA| = 3$, $|AB| = 2$, $|OC| = 6$. Długość odcinka *CD* jest równa ___ / 1 pkt



A. 4 **B.** 9 **C.** 5 **D.** 3

Zadanie 5. Określ, czy trójkąt o podanych długościach boków istnieje. Jeśli istnieje, określ, czy jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny. ___ / 4 pkt

1. 9, 12, 15: _____
2. 6, 8, 11: _____
3. 7, 8, 9: _____
4. 3, 4, 8: _____

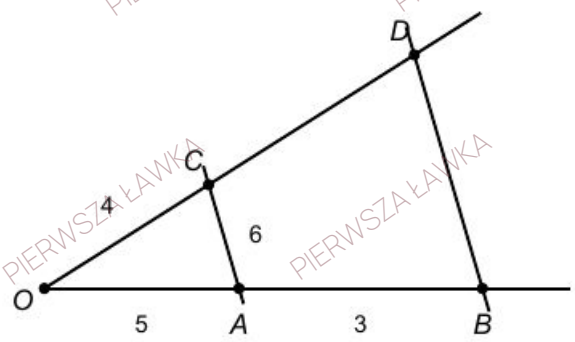
Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 6. W trójkącie *ABC* kąt przy wierzchołku *A* ma miarę 50°, a kąt przy wierzchołku *B* – 75°. Uporządkuj boki trójkąta od najkrótszego do najdłuższego. Uzasadnij odpowiedź.

___ / 2 pkt

Zadanie 7. Proste *AC* i *BD* są równoległe (zobacz rysunek). |*OA*| = 5, |*AB*| = 3, |*OC*| = 4, |*AC*| = 6. Oblicz |*CD*| i |*BD*|.

___ / 2 pkt



Zadanie 8. Trójkąt o bokach 6, 8, 10 jest podobny do trójkąta o bokach

___ / 1 pkt

A. 6, 9, 12 **B.** 3, 4, 6 **C.** 9, 12, 15 **D.** 8, 10, 12

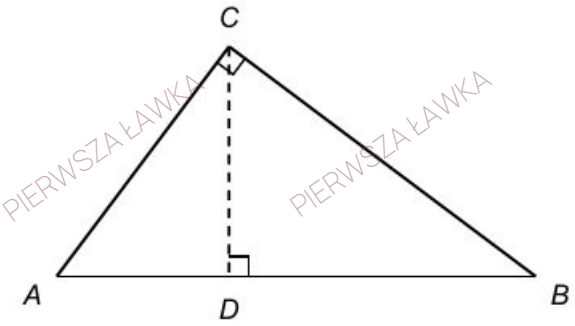
Zadanie 9. Prostokąty P_1 i P_2 są podobne. Prostokąt P_1 ma wymiary 3 cm × 5 cm, a dłuższy bok prostokąta P_2 ma 20 cm. Oblicz obwód i pole prostokąta P_2.

___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 10. Plan miasta wykonano w skali 1 : 25 000. Park zajmuje na planie 6 cm². Oblicz rzeczywistą powierzchnię parku w hektarach (1 ha = 10 000 m²). ___ / 2 pkt

Zadanie 11. W trójkącie prostokątnym *ABC* kąt przy wierzchołku *C* jest prosty, a *CD* jest wysokością opuszczoną na przeciwprostokątną *AB* (zobacz rysunek). Wykaż, że $|AC|^2 = |AD| \cdot |AB|$. Oblicz $|AD|$ dla $|AC| = 6$ i $|AB| = 10$. ___ / 3 pkt



Zadanie 12. Pionowy słupek o wysokości 1,2 m rzuca cień długości 1,8 m. W tej samej chwili pionowe drzewo rzuca cień długości 15 m. Oblicz wysokość drzewa. ___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

A. Zadania wprowadzające – Planimetria: okręgi, kąty w okręgu, wielokąty

KARTA 3/10

Proste ćwiczenia umiejętności z tematu

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 30 pkt

Zadanie 1. Uzupełnij. ___ / 4 pkt

1. Kąt wpisany oparty na tym samym łuku co kąt środkowy o mierze 84° ma miarę _____ .
2. Kąt wewnętrzny ośmiokąta foremnego ma miarę _____ .
3. Długość okręgu o promieniu 5 jest równa _____ .
4. Cięciwa o długości 16 w okręgu o promieniu 10 leży w odległości _____ od środka okręgu.

Zadanie 2. Przekątne rombu mają długości 10 i 24. Bok tego rombu ma długość ___ / 1 pkt

A. 17 **B.** 13 **C.** 12 **D.** 26

Zadanie 3. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 3 pkt

1. Każdy kąt wpisany oparty na półokręgu jest prosty.	**P**	**F**
2. Przekątne każdego równoległoboku są prostopadłe.	**P**	**F**
3. Przekątne każdego prostokąta mają równe długości.	**P**	**F**

Zadanie 4. Cięciwa okręgu o promieniu 17 leży w odległości 8 od środka tego okręgu. Oblicz długość tej cięciwy. ___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 7. Łuk okręgu o promieniu 12 ma długość 8π. Oblicz miarę kąta środkowego opartego na tym łuku oraz pole odpowiedniego wycinka koła. ___ / 2 pkt

Zadanie 8. Dopasuj do każdego wielokąta foremnego (1–4) miarę jego kąta wewnętrznego (a–e). Jedna miara nie pasuje do żadnego wielokąta. ___ / 4 pkt

1. trójkąt równoboczny	a) 108°
2. pięciokąt foremny	b) 150°
3. sześciokąt foremny	c) 60°
4. dziesięciokąt foremny	d) 144°
	e) 120°

1 ____ 2 ____ 3 ____ 4 ____

Zadanie 9. W rombie *ABCD* kąt *ABC* ma miarę 120°, a przekątna *BD* ma długość 7. Oblicz długość boku rombu, długość przekątnej *AC* i pole rombu. ___ / 3 pkt

Zadanie 10. Podstawy trapezu równoramiennego mają długości 20 i 8, a kąt ostry trapezu ma miarę 60°. Oblicz długość ramienia, wysokość, obwód i pole tego trapezu. ___ / 3 pkt

PIERWSZA ŁAWKA

A. Zadania wprowadzające – Planimetria: twierdzenie cosinusów, pola, punkty szczególne, dowody geometryczne

Proste ćwiczenia umiejętności z tematu

KARTA 4/10

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 31 pkt

Zadanie 1. Trójkąt równoboczny ma bok długości 6. Uzupełnij. ___ / 3 pkt

1. Wysokość tego trójkąta ma długość _____ .
2. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy _____ .
3. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy _____ .

Zadanie 2. Dwa boki trójkąta mają długości 2 i 3, a kąt między nimi ma miarę 60°. Trzeci bok ma długość ___ / 1 pkt

A. $\sqrt{19}$ **B.** 7 **C.** 1 **D.** $\sqrt{7}$

Zadanie 3. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 3 pkt

1. Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem przeciwprostokątnej.	**P**	**F**
2. Środek okręgu wpisanego w trójkąt jest punktem przecięcia symetralnych jego boków.	**P**	**F**
3. Środek ciężkości dzieli każdą środkową w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka.	**P**	**F**

Zadanie 4. Dwa boki trójkąta mają długości 6 i 10, a kąt między nimi ma miarę 120°. Oblicz długość trzeciego boku i pole trójkąta. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 5. Trójkąt *KLM* jest podobny do trójkąta *ABC* w skali 3 (boki trójkąta *KLM* są 3 razy dłuższe). Pole trójkąta *ABC* jest równe 8, a jego obwód jest równy 14.
Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

___ / 2 pkt

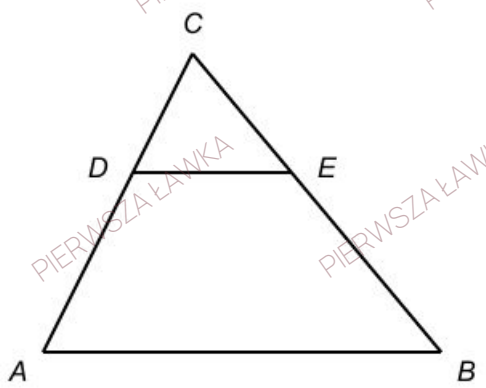
1. Pole trójkąta *KLM* jest równe _____ .
2. Obwód trójkąta *KLM* jest równy _____ .

Zadanie 6. W trapezie *ABCD* podstawy mają długości $|AB| = 15$ i $|CD| = 6$. Przekątne trapezu przecinają się w punkcie *S*, a przekątna *AC* ma długość 14. Oblicz długość odcinka *AS*. Zapisz obliczenia.

___ / 2 pkt

Zadanie 7. W trójkącie *ABC* punkt *D* leży na boku *AC*, a punkt *E* – na boku *BC*, przy czym *DE* ∥ *AB* (zobacz rysunek). Wykaż, że $|CD| \cdot |CB| = |CE| \cdot |CA|$.

___ / 2 pkt



Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 17. Dwa boki trójkąta mają długości 4 i 5, a kąt między nimi ma miarę 60°.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Trzeci bok tego trójkąta ma długość ___ / 1 pkt

A. $\sqrt{21}$ **B.** 21 **C.** 3 **D.** $\sqrt{61}$

Zadanie 18. Romb ma bok długości 8 i kąt ostry o mierze 30°.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Pole tego rombu jest równe ___ / 1 pkt

A. 16 **B.** 64 **C.** 32 **D.** $32\sqrt{3}$

Zadanie 19. Boki trójkąta mają długości 4, 5 i 6.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Cosinus największego kąta tego trójkąta jest równy ___ / 1 pkt

A. $\frac{1}{8}$ **B.** $\frac{9}{16}$ **C.** $-\frac{1}{8}$ **D.** $\frac{3}{4}$

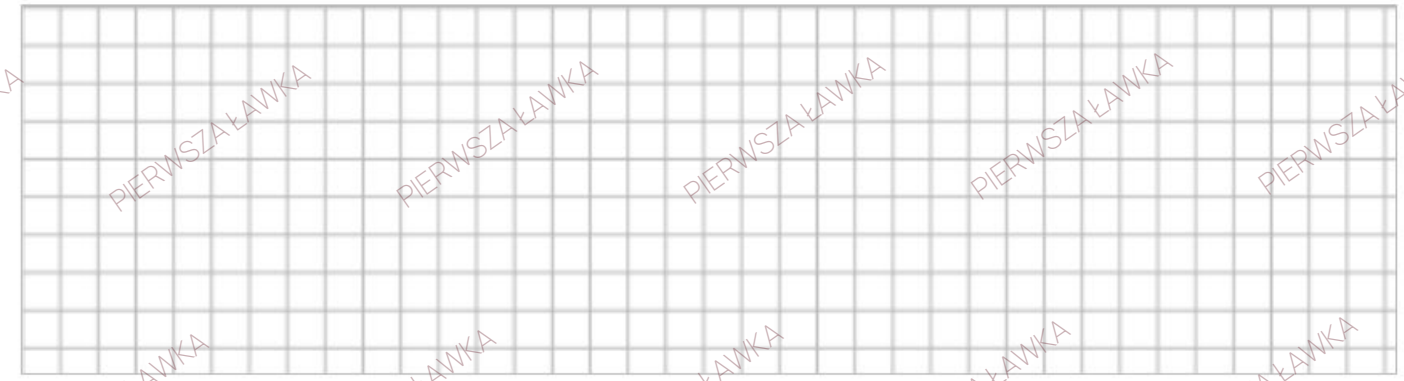
Zadanie 20. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Ortocentrum trójkąta prostokątnego pokrywa się z wierzchołkiem kąta prostego.	**P**	**F**
2. Środek okręgu opisanego na trójkącie rozwartokątnym leży wewnątrz tego trójkąta.	**P**	**F**

Zadanie 21. Wysokość trójkąta równobocznego ma długość 9.
Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe. ___ / 2 pkt

1. Bok tego trójkąta ma długość _____ .
2. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy _____ .

Zadanie 22. Boki trójkąta mają długości 11, 24 i 31. Oblicz miarę największego kąta tego trójkąta i jego pole. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt



PIERWSZA ŁAWKA

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Matura 2027 z matematyki (poziom podstawowy) – zbiór zadań, rozdział 8: Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne, z

Podgląd pokazał 12 z 73 stron. Pełna wersja: 73 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Rozdział 8. Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne – repetytorium – 4 zadania, 6 pkt
- A. Zadania wprowadzające – Planimetria: trójkąty, twierdzenie Talesa, podobieństwo – 12 zadań, 26 pkt
- A. Zadania wprowadzające – Planimetria: okręgi, kąty w okręgu, wielokąty – 11 zadań, 30 pkt
- A. Zadania wprowadzające – Planimetria: twierdzenie cosinusów, pola, punkty szczególne, dowody geometryczne – 11 zadań, 31 pkt
- A. Zadania wprowadzające – trening: Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne – 7 zadań, 12 pkt
- B. Zadania maturalne – Planimetria: trójkąty, twierdzenie Talesa, podobieństwo – 25 zadań, 47 pkt
- B. Zadania maturalne – Planimetria: okręgi, kąty w okręgu, wielokąty – 26 zadań, 47 pkt
- B. Zadania maturalne – Planimetria: twierdzenie cosinusów, pola, punkty szczególne, dowody geometryczne – 26 zadań, 48 pkt
- B. Zadania maturalne – Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne – 15 zadań, 22 pkt
- C. Zadania trudniejsze – Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne – 6 zadań, 13 pkt Na końcu: klucz do zadań zamkniętych, przykładowe pełne rozwiązania i zasad

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matematyka-matura-pp-zbior-zadan-rozdzial-08-planimetria