PIERWSZA ŁAWKA · ZESTAW DZIAŁOWY · MATEMATYKA · KLASA 1 LO I TECHNIKUM · ZAKRES ROZSZERZONY

Dział 11. Wartość bezwzględna – równania i nierówności (zakres rozszerzony)

Wartość bezwzględna jako odległość na osi, własności z karty wzorów, nierówności typu |x − a| < b i |x − a| > b, równania i nierówności z dwiema wartościami bezwzględnymi (metoda przedziałów z częścią wspólną i sumą wyników, metoda geometryczna, podnoszenie do kwadratu z uzasadnieniem, metoda graficzna ze sprawdzeniem), typowe błędy z matur 2025–2026. Dziewięć kart: teoria z przykładami, ćwiczenia, zadania typu maturalnego, dwie kartkówki (A i B) i sprawdzian (A i B) – z kluczem i zasadami oceniania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Wartość bezwzględna – równania i nierówności (zakres rozszerzony) – najważniejsze wiadomości** Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka	4 zad. 9 pkt
2	**Wartość bezwzględna – równania i nierówności (zakres rozszerzony) – ćwiczenia** Ćwiczę umiejętności z działu	8 zad. 25 pkt
3	**Wartość bezwzględna – równania i nierówności (zakres rozszerzony) – zadania typu maturalnego** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	6 zad. 19 pkt
4	**Kartkówka 1: nierówności typu |x − a| < b i odległość na osi – grupa A** 15 minut · 7 pkt	3 zad. 7 pkt
5	**Kartkówka 1: nierówności typu |x − a| < b i odległość na osi – grupa B** 15 minut · 7 pkt	3 zad. 7 pkt
6	**Kartkówka 2: dwie wartości bezwzględne – grupa A** 15 minut · 8 pkt	3 zad. 8 pkt
7	**Kartkówka 2: dwie wartości bezwzględne – grupa B** 15 minut · 8 pkt	3 zad. 8 pkt
8	**Sprawdzian: Wartość bezwzględna – równania i nierówności (zakres rozszerzony) – grupa A** 45 minut · 22 pkt	9 zad. 22 pkt

9	**Sprawdzian: Wartość bezwzględna – równania i nierówności (zakres rozszerzony) – grupa B** 45 minut · 22 pkt	9 zad. 22 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 przypomina najważniejsze wiadomości z działu i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku – od niej warto zacząć.
- Karta 2 to ćwiczenia, a karta 3 – zadania w formule matury 2027 (polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE).
- Karty 4–7 to dwie kartkówki (po 15 minut), każda w grupach A i B. Karty 8–9 to sprawdzian (45 minut) w grupach A i B – te same typy zadań i ta sama punktacja, inne liczby.
- Klucz na końcu zestawu zawiera odpowiedzi, przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE (kamienie milowe, błąd rachunkowy = −1 pkt).
- Osobny plik „Powtórka” zbiera definicje, wzory (z zaznaczeniem, które są w karcie wzorów CKE), typowe błędy i test „Sprawdź się”.

Materiał oryginalny. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: III.R4, I.7; cele ogólne I, III.1, IV.4. Miejsce w seriach podręczników: NE ZPiR kl. 1 (Język matematyki: wartość bezwzględna i jej własności) i kl. 2 · Pazdro ZR kl. 2 (Równania i nierówności z wartością bezwzględną i z parametrem) · GWO ZR kl. 1 (Wartość bezwzględna w równaniach i nierównościach). Nazwy wydawnictw i serii podano tylko informacyjnie – materiał nie jest z nimi powiązany. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

PIERWSZA ŁAWKA

Wartość bezwzględna – równania i nierówności (zakres rozszerzony) – najważniejsze wiadomości

Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka

KARTA 1/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 9 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Wartość bezwzględna jako odległość.** $|x - a|$ to odległość liczby x od liczby a na osi liczbowej, a $|a - b|$ – odległość liczb a i b. Zapis $|x + 3|$ czytamy jako $|x - (-3)|$, czyli odległość od liczby -3. Zawsze $|x| \geq 0$ oraz $\sqrt{x^2} = |x|$.
- **Własności** (są w karcie wzorów CKE, dział 1): $|-x| = |x|$, $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ dla $y \neq 0$, $|x + y| \leq |x| + |y|$. Stąd np. $|2x - 6| = 2|x - 3|$ i $|5 - x| = |x - 5|$.

Nierówność ($b > 0$)	Równoważnie	Zbiór rozwiązań
$\|x - a\| < b$	$a - b < x < a + b$	$(a - b, a + b)$ – liczby odległe od a o mniej niż b
$\|x - a\| \leq b$	$a - b \leq x \leq a + b$	$\langle a - b, a + b \rangle$
$\|x - a\| > b$	$x < a - b$ lub $x > a + b$	$(-\infty, a - b) \cup (a + b, +\infty)$
$\|x - a\| \geq b$	$x \leq a - b$ lub $x \geq a + b$	$(-\infty, a - b\rangle \cup \langle a + b, +\infty)$

- **Przypadki szczególne.** Gdy $b < 0$: nierówności $|x - a| < b$ i $|x - a| \leq b$ nie mają rozwiązań, a $|x - a| > b$ i $|x - a| \geq b$ spełnia każda liczba rzeczywista. Gdy $b = 0$: $|x - a| \leq 0$ tylko dla $x = a$, a $|x - a| > 0$ dla każdego $x \neq a$ – nie zgub tego punktu.
- **Metoda przedziałów** (dwie lub więcej wartości bezwzględnych). 1) Wyznacz miejsca zerowe wyrażeń pod wartościami bezwzględnymi. 2) Podziel oś na przedziały, które razem dają cały zbiór $\mathbb{R}$; każdy punkt podziału należy do dokładnie jednego przedziału, np. $(-\infty, -3)$, $\langle -3, 4)$, $\langle 4, +\infty)$. 3) W każdym przedziale opuść wartości bezwzględne zgodnie ze znakiem wyrażenia i rozwiąż nierówność liniową. 4) Weź **część wspólną** otrzymanego zbioru z rozpatrywanym przedziałem. 5) Odpowiedź to **suma** ($\cup$) wyników ze wszystkich przedziałów.
- **Metoda geometryczna.** $|x - a| + |x - b|$ to suma odległości liczby x od a i od b. Dla x leżących między a i b jest ona równa $|a - b|$, poza tym odcinkiem – większa. Równanie $|x - a| = |x - b|$ (dla $a \neq b$) spełnia tylko środek odcinka: $x = \frac{a + b}{2}$; nierówność $|x - a| < |x - b|$ spełniają liczby leżące bliżej a niż b.
- **Podnoszenie do kwadratu.** Dla liczb nieujemnych u, v: $u < v \Leftrightarrow u^2 < v^2$. Obie strony nierówności $|A| < |B|$ są nieujemne, więc wolno ją zastąpić nierównością $A^2 < B^2$ – trzeba to jednak napisać w rozwiązaniu. Nie podnosimy do kwadratu, gdy jedna ze stron może być ujemna (np. prawa strona $x - 4$).
- **Metoda graficzna.** Rysujemy wykresy obu stron (np. $y = |x - 1|$ – łamana z wierzchołkiem $(1, 0)$ – i prostą), odczytujemy odcięte punktów wspólnych i **sprawdzamy je rachunkiem**, podstawiając do obu wzorów. Bez sprawdzenia CKE przyznaje za takie rozwiązanie co najwyżej 3 z 4 punktów.

- Nie dziel obu stron przez wyrażenie z wartością bezwzględną (np. przez $|x - 3|$), bo może być równe 0. Wyłącz je przed nawias, a przypadek $x = 3$ rozpatrz osobno (błąd z matury 2026).

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. Rozwiąż nierówność $|2x - 5| \leq 7$.

Sposób I: $-7 \leq 2x - 5 \leq 7$, więc $-2 \leq 2x \leq 12$, czyli $-1 \leq x \leq 6$.

Sposób II (odległość): $|2x - 5| = 2|x - \frac{5}{2}|$, więc $|x - \frac{5}{2}| \leq \frac{7}{2}$ – liczby odległe od $\frac{5}{2}$ o co najwyżej $\frac{7}{2}$, czyli od -1 do 6.

Odpowiedź: $x \in \langle -1, 6 \rangle$.

Przykład 2. Rozwiąż równanie $|x + 1| + |x - 4| = 9$.

Sposób geometryczny: szukamy liczb, których suma odległości od -1 i od 4 jest równa 9. Odległość liczb -1 i 4 to 5, więc liczby między nimi dają sumę 5 – za mało. Poza odcinkiem nadwyżka $9 - 5 = 4$ dzieli się po równo: $x = -1 - 2 = -3$ lub $x = 4 + 2 = 6$.

Sposób algebraiczny: dla $x < -1$: $-x - 1 - x + 4 = 9$, $x = -3$ – należy do przedziału; dla $-1 \leq x < 4$: $5 = 9$ – sprzeczność; dla $x \geq 4$: $2x - 3 = 9$, $x = 6$ – należy do przedziału.

Odpowiedź: $x = -3$ lub $x = 6$.

Przykład 3. Rozwiąż nierówność $|x + 4| - |x - 2| > 2$.

Miejsca zerowe wyrażeń: -4 i 2. Przedziały: $(-\infty, -4)$, $\langle -4, 2)$, $\langle 2, +\infty)$.

1) $x < -4$: $-(x + 4) - (2 - x) > 2$, czyli $-6 > 2$ – sprzeczność, brak rozwiązań.

2) $-4 \leq x < 2$: $(x + 4) - (2 - x) > 2$, $2x + 2 > 2$, $x > 0$. Część wspólna z przedziałem: $(0, 2)$.

3) $x \geq 2$: $(x + 4) - (x - 2) > 2$, czyli $6 > 2$ – prawda dla każdego x z przedziału: $\langle 2, +\infty)$.

Odpowiedź – **suma** wyników: $x \in (0, 2) \cup \langle 2, +\infty)$, czyli $x \in (0, +\infty)$.

Przykład 4. Rozwiąż nierówność $|x - 1| < |x + 5|$.

Sposób I (geometria): szukamy liczb leżących bliżej 1 niż -5. Środek odcinka o końcach -5 i 1 to -2, więc $x > -2$.

Sposób II (kwadraty): obie strony są nieujemne, więc nierówność jest równoważna nierówności $(x - 1)^2 < (x + 5)^2$, czyli $x^2 - 2x + 1 < x^2 + 10x + 25$, $-12x < 24$, $x > -2$.

Odpowiedź: $x \in (-2, +\infty)$.

ZADANIA

Zadanie 1. Zapisz zbiór rozwiązań nierówności w postaci przedziału, sumy przedziałów lub zbioru. ___ / 4 pkt

1. $|x - 3| < 2$: _____
2. $|x + 1| \geq 4$: _____
3. $|x - 2| \leq 0$: _____
4. $|x + 5| < -1$: _____

Zadanie 2. Liczby, których odległość na osi liczbowej od liczby 4 jest mniejsza niż 3, to wszystkie rozwiązania nierówności ___ / 1 pkt

A. $|x + 4| < 3$ **B.** $|x - 4| > 3$ **C.** $|x - 4| < 3$ **D.** $|x - 3| < 4$

Wartość bezwzględna – równania i nierówności (zakres rozszerzony) – ćwiczenia

KARTA 2/9

Ćwiczę umiejętności z działu

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 25 pkt

Zadanie 1. Rozwiąż nierówności. Zapisz zbiór rozwiązań w postaci przedziału, sumy przedziałów lub zbioru. ___ / 4 pkt

1. $|2x - 3| < 5$: _____
2. $|3 - x| \geq 2$: _____
3. $|x + 6| \leq 0$: _____
4. $|4x + 2| > 6$: _____

Zadanie 2. Dopasuj do każdego opisu (1–4) nierówność (a–d), której zbiorem rozwiązań jest opisany zbiór liczb. ___ / 4 pkt

1. liczby odległe od −2 o więcej niż 5
2. liczby, których odległość od 1 jest równa co najwyżej 3
3. liczby leżące bliżej 0 niż 6
4. przedział (2, 8)

a) $|x - 5| < 3$

b) $|x + 2| > 5$

c) $|x| < |x - 6|$

d) $|x - 1| \leq 3$

1 ____ 2 ____ 3 ____ 4 ____

Zadanie 3. Rozwiąż równanie $|x - 2| + |x + 4| = 10$ dwoma sposobami: geometrycznie (suma odległości) i metodą przedziałów. ___ / 3 pkt

Zadanie 4. Rozwiąż nierówność $|x - 3| + |x + 1| \leq 6$, korzystając z interpretacji geometrycznej. Zaznacz zbiór rozwiązań na osi liczbowej. ___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Kartkówka 1: nierówności typu |x − a| < b i odległość na osi – grupa A

15 minut · 7 pkt

KARTA 4/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 7 pkt

Zadanie 1. Rozwiąż nierówności. Zapisz zbiór rozwiązań w postaci przedziału lub sumy przedziałów. ___ / 3 pkt

1. $|x - 6| < 2$: _____
2. $|x + 3| \geq 5$: _____
3. $|2x + 1| \leq 9$: _____

Zadanie 2. Liczby, których odległość na osi liczbowej od liczby −3 jest większa niż 4, to wszystkie rozwiązania nierówności ___ / 1 pkt

A. $|x + 3| < 4$ **B.** $|x - 3| > 4$ **C.** $|x + 4| > 3$ **D.** $|x + 3| > 4$

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie liczby całkowite x spełniające nierówność $|3x - 4| < 8$. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

PIERWSZA ŁAWKA

Kartkówka 1: nierówności typu |x − a| < b i odległość na osi – grupa B

15 minut · 7 pkt

KARTA 5/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 7 pkt

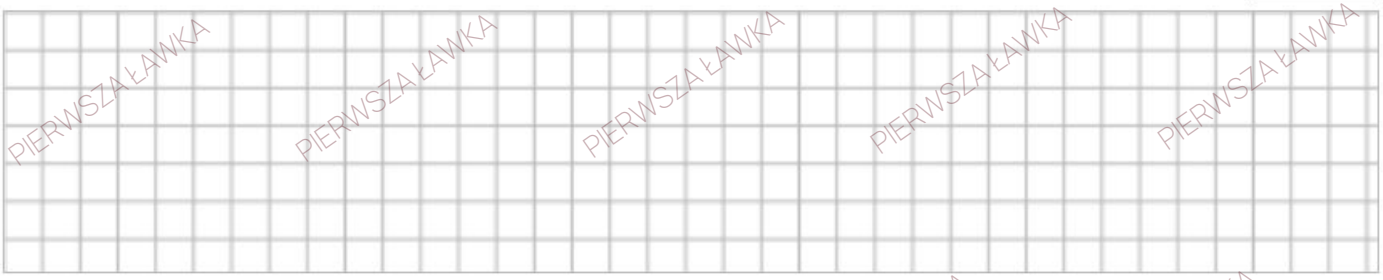
Zadanie 1. Rozwiąż nierówności. Zapisz zbiór rozwiązań w postaci przedziału lub sumy przedziałów. ___ / 3 pkt

1. $|x - 5| < 3$: _____
2. $|x + 2| \geq 6$: _____
3. $|2x - 3| \leq 7$: _____

Zadanie 2. Liczby, których odległość na osi liczbowej od liczby 5 jest mniejsza niż 2, to wszystkie rozwiązania nierówności ___ / 1 pkt

A. $|x - 5| > 2$ **B.** $|x - 5| < 2$ **C.** $|x - 2| < 5$ **D.** $|x + 5| < 2$

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie liczby całkowite x spełniające nierówność $|4x + 3| < 9$. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt



Kartkówka 2: dwie wartości bezwzględne – grupa A

15 minut · 8 pkt

KARTA 6/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

Zadanie 1. Równanie $|x - 1| + |x + 5| = 6$ ma ___ / 1 pkt

A. dokładnie jedno rozwiązanie.

B. dokładnie dwa rozwiązania.

C. brak rozwiązań.

D. nieskończenie wiele rozwiązań.

Zadanie 2. Rozwiąż równanie $|x + 3| + |x - 5| = 12$. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 3. Rozwiąż nierówność $|x - 2| - |x + 4| < 2$. Zapisz obliczenia. ___ / 4 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Kartkówka 2: dwie wartości bezwzględne – grupa B

15 minut · 8 pkt

KARTA 7/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

Zadanie 1. Równanie $|x + 2| + |x - 4| = 6$ ma ___ / 1 pkt

A. dokładnie jedno rozwiązanie.

B. nieskończenie wiele rozwiązań.

C. brak rozwiązań.

D. dokładnie dwa rozwiązania.

Zadanie 2. Rozwiąż równanie $|x - 4| + |x + 2| = 10$. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 3. Rozwiąż nierówność $|x + 1| - |x - 5| \geq 2$. Zapisz obliczenia. ___ / 4 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Sprawdzian: Wartość bezwzględna – równania i nierówności (zakres rozszerzony) – grupa A

45 minut · 22 pkt

KARTA 8/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 22 pkt

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $|x + 4| \leq 3$ jest ___ / 1 pkt

A. $\langle 1, 7\rangle$ **B.** $(-\infty, -7\rangle \cup \langle -1, +\infty)$

C. $\langle -7, -1\rangle$ **D.** $\langle -1, 7\rangle$

Zadanie 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczba wszystkich rozwiązań równania $|x - 2| + |x - 8| = 4$ jest równa ___ / 1 pkt

A. 0 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 1

Zadanie 3. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Nierówność $\|x - 3\| > -1$ spełnia każda liczba rzeczywista.	**P**	**F**
2. Nierówność $\|x + 1\| \leq \|x - 5\|$ jest równoważna nierówności $x \geq 2$.	**P**	**F**

Zadanie 4. Wyznacz wszystkie liczby całkowite x spełniające nierówność $|2x + 3| < 7$. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 5. Rozwiąż równanie $|x - 1| + |x + 3| = 2x + 6$. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Sprawdzian: Wartość bezwzględna – równania i nierówności (zakres rozszerzony) – grupa B

45 minut · 22 pkt

KARTA 9/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 22 pkt

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $|x - 3| \leq 5$ jest ___ / 1 pkt

A. $\langle 2, 8\rangle$ **B.** $\langle -8, 2\rangle$

C. $\langle -2, 8\rangle$ **D.** $(-\infty, -2\rangle \cup \langle 8, +\infty)$

Zadanie 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczba wszystkich rozwiązań równania $|x + 1| + |x - 6| = 5$ jest równa ___ / 1 pkt

A. 2 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 4

Zadanie 3. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Nierówność $\|x + 7\| \geq -2$ spełnia każda liczba rzeczywista.	**P**	**F**
2. Nierówność $\|x - 2\| < \|x + 4\|$ jest równoważna nierówności $x < -1$.	**P**	**F**

Zadanie 4. Wyznacz wszystkie liczby całkowite x spełniające nierówność $|2x - 5| < 9$. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 5. Rozwiąż równanie $|x + 2| + |x - 4| = 2x + 4$. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Wartość bezwzględna – równania i nierówności (zakres rozszerzony) – kartkówki, sprawdzian i karty pracy z powtórką, matematyka, klasa 1 LO i...

Podgląd pokazał 11 z 36 stron. Pełna wersja: 36 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Wartość bezwzględna – równania i nierówności (zakres rozszerzony) – najważniejsze wiadomości – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 2: Wartość bezwzględna – równania i nierówności (zakres rozszerzony) – ćwiczenia – 8 zadań, 25 pkt
- Karta 3: Wartość bezwzględna – równania i nierówności (zakres rozszerzony) – zadania typu maturalnego – 6 zadań, 19 pkt
- Karta 4: Kartkówka 1: nierówności typu Ix – al < b i odległość na osi – grupa A – 3 zadania, 7 pkt
- Karta 5: Kartkówka 1: nierówności typu Ix – al < b i odległość na osi – grupa B – 3 zadania, 7 pkt
- Karta 6: Kartkówka 2: dwie wartości bezwzględne – grupa A – 3 zadania, 8 pkt
- Karta 7: Kartkówka 2: dwie wartości bezwzględne – grupa B – 3 zadania, 8 pkt
- Karta 8: Sprawdzian: Wartość bezwzględna – równania i nierówności (zakres rozszerzony) – grupa A – 9 zadań, 22 pkt
- Karta 9: Sprawdzian: Wartość bezwzględna – równania i nierówności (zakres rozszerzony) – grupa B – 9 zadań, 22 pkt Karta 1 przypomina teorię i pokazuje przykłady rozwiązane krok po

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matematyka-liceum-klasa-1-zr-dzial-11-wartosc-bezwzgledna-rownania-i-nierownosci-za