PIERWSZA ŁAWKA · ZESTAW DZIAŁOWY · MATEMATYKA · KLASA 4 LO I TECHNIKUM · ZAKRES PODSTAWOWY

Dział 3. Graniastosłupy i ostrosłupy

Wzajemne położenie prostych w przestrzeni (proste skośne, prostopadłe nieprzecinające się), kąt między prostą a płaszczyzną, kąt dwuścienny, kąty w graniastosłupach i ostrosłupach (krawędź–podstawa, ściana–podstawa, przekątna), trójkąty robocze, pola powierzchni i objętości, także z wykorzystaniem trygonometrii i tablicy wartości funkcji trygonometrycznych. Dziewięć kart: teoria z przykładami, ćwiczenia, zadania typu maturalnego, dwie kartkówki (A i B) i sprawdzian (A i B) – z kluczem i zasadami oceniania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Graniastosłupy i ostrosłupy – najważniejsze wiadomości** Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka	4 zad. 11 pkt
2	**Graniastosłupy i ostrosłupy – ćwiczenia** Ćwiczę umiejętności z działu	8 zad. 25 pkt
3	**Graniastosłupy i ostrosłupy – zadania typu maturalnego** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	7 zad. 13 pkt
4	**Kartkówka 1: kąty w graniastosłupach i ostrosłupach – grupa A** 15 minut · 9 pkt	4 zad. 9 pkt
5	**Kartkówka 1: kąty w graniastosłupach i ostrosłupach – grupa B** 15 minut · 9 pkt	4 zad. 9 pkt
6	**Kartkówka 2: pola powierzchni i objętości wielościanów – grupa A** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
7	**Kartkówka 2: pola powierzchni i objętości wielościanów – grupa B** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
8	**Sprawdzian: Graniastosłupy i ostrosłupy – grupa A** 45 minut · 20 pkt	9 zad. 20 pkt
9	**Sprawdzian: Graniastosłupy i ostrosłupy – grupa B** 45 minut · 20 pkt	9 zad. 20 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 przypomina najważniejsze wiadomości z działu i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku – od niej warto zacząć.

- Karta 2 to ćwiczenia, a karta 3 – zadania w formule matury 2027 (polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE).
- Karty 4–7 to dwie kartkówki (po 15 minut), każda w grupach A i B. Karty 8–9 to sprawdzian (45 minut) w grupach A i B – te same typy zadań i ta sama punktacja, inne liczby.
- Klucz na końcu zestawu zawiera odpowiedzi, przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE (kamienie milowe, błąd rachunkowy = −1 pkt).
- Osobny plik „Powtórka” zbiera definicje, wzory (z zaznaczeniem, które są w karcie wzorów CKE), typowe błędy i test „Sprawdź się”.

Materiał oryginalny. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: X.1, X.2, X.3, X.5 (+ VII.1, VII.4, VIII.3); cele ogólne III.1, III.3, IV.4; przekroje i tw. o trzech prostopadłych (X.R1–X.R2, zakres rozszerzony) – tylko informacja. Miejsce w seriach podręczników: NE kl. 4 · Pazdro kl. 4 · GWO kl. 2–3; technikum NE kl. 5. Nazwy wydawnictw i serii podano tylko informacyjnie – materiał nie jest z nimi powiązany. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

Graniastosłupy i ostrosłupy – najważniejsze wiadomości

Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka

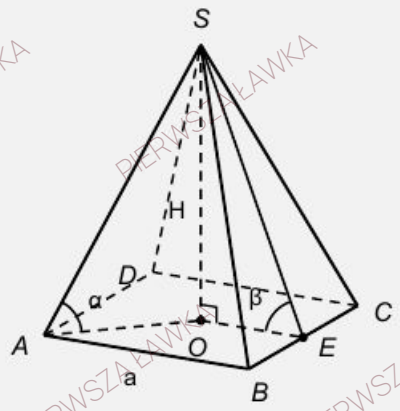
Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 11 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Proste w przestrzeni.** Dwie różne proste mogą się przecinać, być równoległe albo być **skośne** – nie mają punktów wspólnych i nie leżą w jednej płaszczyźnie. Kąt między prostymi skośnymi to kąt między prostymi do nich równoległymi, poprowadzonymi przez jeden punkt. Proste skośne mogą być prostopadłe: w sześcianie $ABCDEFGH$ krawędzie AB i CG nie mają punktu wspólnego, a są prostopadłe.
- **Kąt między prostą a płaszczyzną.** Prosta prostopadła do płaszczyzny tworzy kąt prosty z każdą prostą tej płaszczyzny. Gdy prosta przebija płaszczyznę pod kątem ostrym, jej kąt z płaszczyzną to kąt między prostą a jej **rzutem prostokątnym** na tę płaszczyznę. Przykład: kąt nachylenia przekątnej AG prostopadłościanu do podstawy to kąt GAC, bo AC jest rzutem odcinka AG na podstawę.
- **Kąt dwuścienny** tworzą dwie półpłaszczyzny o wspólnej krawędzi. Jego miarą jest miara **kąta liniowego**: w dowolnym punkcie krawędzi prowadzimy w obu ścianach półproste prostopadłe do krawędzi. Kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego do podstawy leży przy środku E krawędzi podstawy: między wysokością ściany SE a odcinkiem OE (O – środek podstawy). Uzasadnienie przez twierdzenie o trzech prostopadłych to zakres rozszerzony.
- **Co wynika z nazwy bryły.** Graniastosłup prosty ma krawędzie boczne prostopadłe do podstaw; prawidłowy – dodatkowo podstawy będące wielokątami foremnymi. Ostrosłup prawidłowy ma w podstawie wielokąt foremny, a spodek wysokości w środku podstawy. Jego krawędzie boczne są równe, a ściany boczne – przystającymi trójkątami równoramiennymi. **Nie** są trójkątami równobocznymi, chyba że wynika to z danych.

PIERWSZA ŁAWKA

- **Trójkąty robocze** w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy a i wysokości H: trójkąt SOA (przyprostokątne H i $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, kąt α krawędzi bocznej z podstawą przy A), trójkąt SOE (przyprostokątne H i $\frac{a}{2}$, kąt β ściany z podstawą przy E), trójkąt SEB (połowa ściany bocznej). W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym $|OA| = R = \frac{2}{3}h$, $|OD| = r = \frac{1}{3}h$, gdzie $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

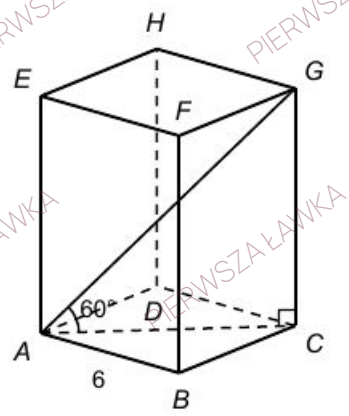


- **Przekątne:** kwadrat $a\sqrt{2}$, sześcian $a\sqrt{3}$, prostopadłościan o krawędziach a, b, c: $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Z przekątnej i kąta obliczasz krawędzie funkcjami trygonometrycznymi (VII.4), np. $H = d \cdot \sin \alpha$.
- **Pola i objętości:** graniastosłup $V = P_p \cdot H$, $P_c = 2P_p + P_b$; ostrosłup $V = \frac{1}{3}P_p \cdot H$, $P_c = P_p + P_b$, gdzie P_b – suma pól **wszystkich** ścian bocznych. Sześciokąt foremny o boku a to 6 trójkątów równobocznych: $P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.
- W „Wybranych wzorach matematycznych” CKE są: objętości i pola prostopadłościanu, graniastosłupa prostego i ostrosłupa, związki w trójkącie równobocznym (h, P, $r = \frac{1}{3}h$, $R = \frac{2}{3}h$), tablica wartości funkcji trygonometrycznych i twierdzenie o trzech prostych prostopadłych (zakres rozszerzony). Definicji kątów w bryłach i przekątnych brył tam nie ma.

PIERWSZA ŁAWKA

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6, a jego przekątna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz wysokość, objętość i pole powierzchni całkowitej graniastosłupa.

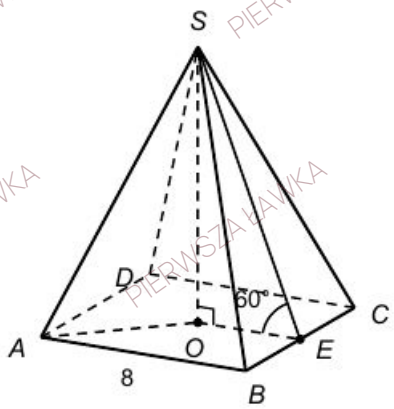


Rzutem przekątnej AG na podstawę jest przekątna podstawy AC, więc szukany kąt to $\sphericalangle GAC = 60°$. Trójkąt roboczy ACG jest prostokątny (kąt prosty przy C).

$|AC| = 6\sqrt{2}$, $H = |CG| = |AC| \cdot \operatorname{tg} 60° = 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{6}$.

$V = 6^2 \cdot 6\sqrt{6} = 216\sqrt{6}$, $P_c = 2 \cdot 36 + 4 \cdot 6 \cdot 6\sqrt{6} = 72 + 144\sqrt{6}$.

Przykład 2. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 8, a ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.



Kąt ściany z podstawą to $\sphericalangle SEO$, gdzie E – środek krawędzi BC, O – środek podstawy.

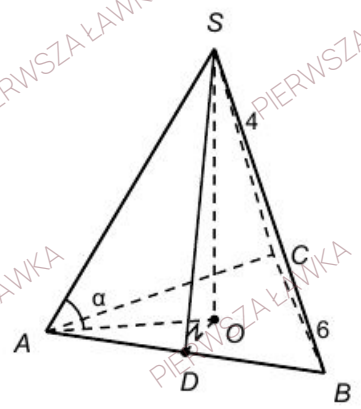
Trójkąt SOE jest prostokątny, $|OE| = 4$.

$H = |OE| \cdot \operatorname{tg} 60° = 4\sqrt{3}$, wysokość ściany: $|SE| = \dfrac{|OE|}{\cos 60°} = 8$.

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 64 \cdot 4\sqrt{3} = \dfrac{256\sqrt{3}}{3}$, $P_b = 4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 128$, $P_c = 64 + 128 = 192$.

Podgląd • Pierwsza Ławka

Przykład 3. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 6, a krawędź boczna – długość 4. Oblicz miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy i objętość ostrosłupa.



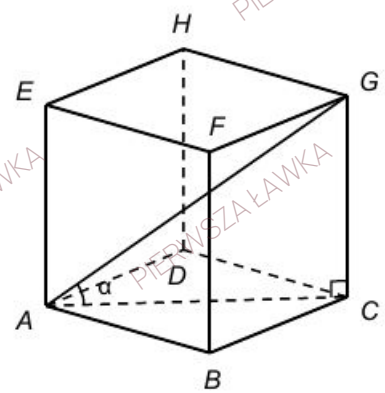
Spodek wysokości O jest środkiem trójkąta równobocznego ABC, więc

$|OA| = R = \frac{2}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

W trójkącie SOA: $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, więc $\alpha = 30°$. $H = \sqrt{16 - 12} = 2$.

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{36\sqrt{3}}{4} \cdot 2 = 6\sqrt{3}$.

Przykład 4. W sześcianie *ABCDEFGH* wskaż dwie proste skośne, które są prostopadłe. Oblicz tangens kąta nachylenia przekątnej sześcianu do płaszczyzny podstawy.



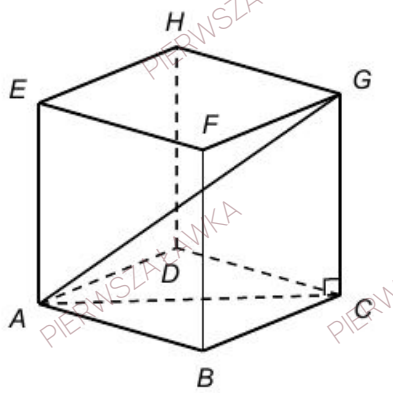
Proste AB i CG nie mają punktów wspólnych i nie leżą w jednej płaszczyźnie, więc są skośne. Prosta CG jest równoległa do BF, a $BF \perp AB$, więc $AB \perp CG$.

Kąt nachylenia przekątnej AG to $\alpha = \sphericalangle GAC$. Dla krawędzi a: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Podgląd • Pierwsza Ławka

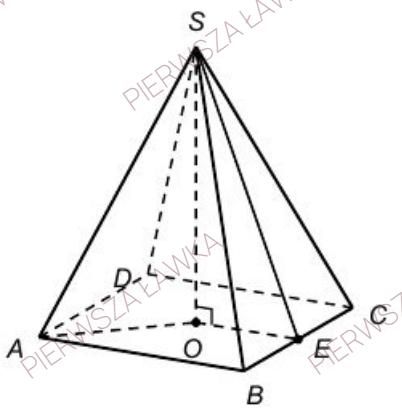
ZADANIA

Zadanie 1. W sześcianie *ABCDEFGH* (zobacz rysunek) określ wzajemne położenie prostych: przecinające się, równoległe czy skośne. ___ / 4 pkt



1. *AB* i *EF*: _____
2. *AB* i *CG*: _____
3. *AE* i *EH*: _____
4. *AC* i *EG*: _____

Zadanie 2. Punkt *O* jest środkiem podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego *ABCDS*, a *E* – środkiem krawędzi *BC* (zobacz rysunek). Kątem nachylenia krawędzi bocznej *SA* do płaszczyzny podstawy jest kąt ___ / 1 pkt



A. *SEO* **B.** *SAO* **C.** *ASO* **D.** *SAB*

Zadanie 3. Oceń, czy zdanie o ostrosłupie prawidłowym jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 3 pkt

1. Wszystkie krawędzie boczne mają równe długości.	**P**	**F**
2. Ściany boczne są trójkątami równobocznymi.	**P**	**F**
3. Spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie.	**P**	**F**

Podgląd • Pierwsza Ławka

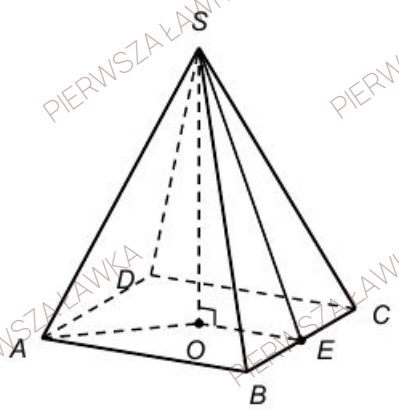
Graniastosłupy i ostrosłupy – ćwiczenia

KARTA 2/9

Ćwiczę umiejętności z działu

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 25 pkt

Zadanie 1. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym *ABCDS* punkt *O* jest środkiem podstawy, a *E* – środkiem krawędzi *BC* (zobacz rysunek). Dopasuj do każdego opisu (1–4) właściwy kąt (a–d). ___ / 4 pkt



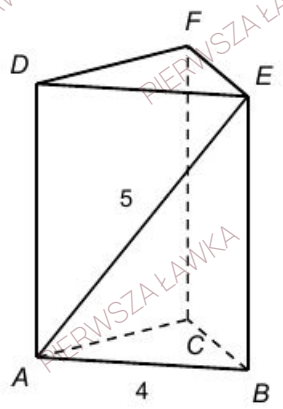
1. kąt nachylenia krawędzi bocznej *SC* do płaszczyzny podstawy	a) $\sphericalangle SEO$
2. kąt nachylenia ściany bocznej *BCS* do płaszczyzny podstawy	b) $\sphericalangle SCO$
3. kąt między krawędzią boczną *SC* a wysokością ostrosłupa	c) $\sphericalangle OSC$
4. kąt między dwiema krawędziami bocznymi tej samej ściany	d) $\sphericalangle BSC$

1 ____ 2 ____ 3 ____ 4 ____

Zadanie 2. Prostopadłościan ma krawędzie o długościach 3, 4 i 12 (krawędź długości 12 jest wysokością). Oblicz długość przekątnej prostopadłościanu oraz sinus i tangens kąta nachylenia tej przekątnej do płaszczyzny podstawy. ___ / 3 pkt

Zadanie 3. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 4, a przekątna ściany bocznej – długość 5 (zobacz rysunek). Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej graniastosłupa.

___ / 3 pkt



Zadanie 4. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6, a krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°. Oblicz objętość ostrosłupa i długość krawędzi bocznej. Jakimi trójkątami są ściany boczne tego ostrosłupa?

___ / 3 pkt

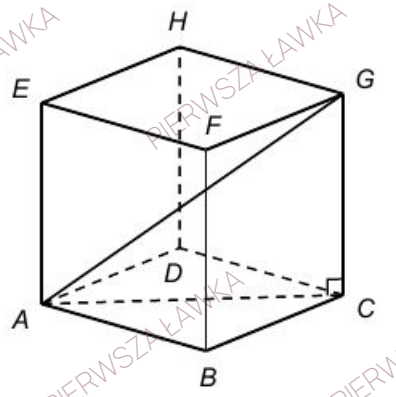
Zadanie 5. Kąt dwuścienny między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma miarę

___ / 1 pkt

A. 60° **B.** 90° **C.** 120° **D.** 135°

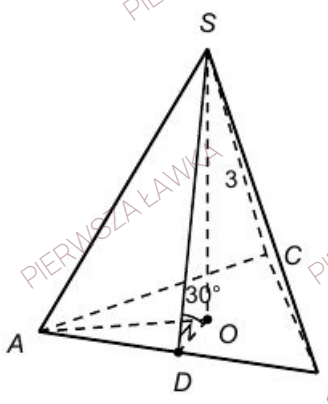
Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 6. Dany jest sześcian *ABCDEFGH* (zobacz rysunek). Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 4 pkt



1. Proste *AB* i *CG* są prostopadłe.	**P**	**F**
2. Proste *AB* i *CG* mają punkt wspólny.	**P**	**F**
3. Proste *AC* i *EG* są równoległe.	**P**	**F**
4. Proste *AG* i *CE* są skośne.	**P**	**F**

Zadanie 7. Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 3, a ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° (zobacz rysunek). Oblicz długość krawędzi podstawy, objętość i pole powierzchni bocznej ostrosłupa. ___ / 4 pkt



Podgląd • Pierwsza Ławka

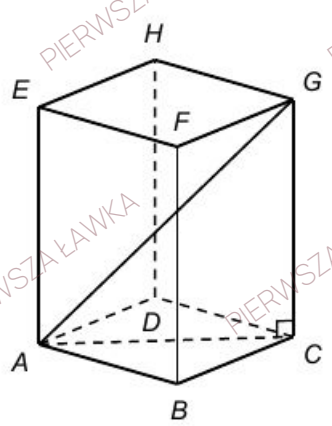
Kartkówka 1: kąty w graniastosłupach i ostrosłupach – grupa A

15 minut · 9 pkt

KARTA 4/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 9 pkt

Zadanie 1. Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny *ABCDEFGH* (zobacz rysunek). Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Kątem nachylenia przekątnej *AG* do płaszczyzny podstawy jest kąt ___ / 1 pkt



A. *AGC* **B.** *GAE* **C.** *GAC* **D.** *GAB*

Zadanie 2. W prostopadłościanie *ABCDEFGH* (podstawy *ABCD* i *EFGH*, *AE* – krawędź boczna) oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 2 pkt

1. Proste *AD* i *BF* są skośne.	**P**	**F**
2. Proste *AE* i *CG* są równoległe.	**P**	**F**

Zadanie 3. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 4, a jego przekątna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz wysokość graniastosłupa i długość jego przekątnej. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Sprawdzian: Graniastosłupy i ostrosłupy – grupa A

KARTA 8/9

45 minut · 20 pkt

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 20 pkt

Zadanie 1. Dany jest sześcian *ABCDEFGH* (podstawy *ABCD* i *EFGH*, krawędzie boczne *AE*, *BF*, *CG*, *DH*).
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Prostymi skośnymi są proste ___ / 1 pkt

A. *AE* i *CG* **B.** *AB* i *CG* **C.** *AC* i *EG* **D.** *AB* i *EF*

Zadanie 2. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny *ABCDS*. Punkt *O* jest środkiem podstawy, a *K* – środkiem krawędzi *CD*.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Kątem nachylenia ściany bocznej *CDS* do płaszczyzny podstawy jest kąt ___ / 1 pkt

A. *OSK* **B.** *SKC* **C.** *SKO* **D.** *SCO*

Zadanie 3. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Objętość sześcianu, którego przekątna ma długość $4\sqrt{3}$, jest równa ___ / 1 pkt

A. 64 **B.** $64\sqrt{3}$ **C.** 48 **D.** $16\sqrt{3}$

Zadanie 4. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 6, a wysokość – długość $2\sqrt{3}$.
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Pole podstawy tego graniastosłupa jest równe $9\sqrt{3}$.	**P**	**F**
2. Przekątna ściany bocznej jest nachylona do krawędzi podstawy pod kątem 60°.	**P**	**F**

Zadanie 5. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 8, a krawędź boczna – długość 9.
Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe. ___ / 2 pkt

1. Wysokość tego ostrosłupa jest równa _____ .
2. Objętość tego ostrosłupa jest równa _____ .

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Graniastosłupy i ostrosłupy – kartkówki, sprawdzian i karty pracy z powtórką, matematyka, klasa 4 LO i technikum (zakres podstawowy)

Podgląd pokazał 12 z 40 stron. Pełna wersja: 40 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Graniastosłupy i ostrosłupy – najważniejsze wiadomości – 4 zadania, 11 pkt
- Karta 2: Graniastosłupy i ostrosłupy – ćwiczenia – 8 zadań, 25 pkt
- Karta 3: Graniastosłupy i ostrosłupy – zadania typu maturalnego – 7 zadań, 13 pkt
- Karta 4: Kartkówka 1: kąty w graniastosłupach i ostrosłupach – grupa A – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 5: Kartkówka 1: kąty w graniastosłupach i ostrosłupach – grupa B – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 6: Kartkówka 2: pola powierzchni i objętości wielościanów – grupa A – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 7: Kartkówka 2: pola powierzchni i objętości wielościanów – grupa B – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 8: Sprawdzian: Graniastosłupy i ostrosłupy – grupa A – 9 zadań, 20 pkt
- Karta 9: Sprawdzian: Graniastosłupy i ostrosłupy – grupa B – 9 zadań, 20 pkt Karta 1 przypomina teorię i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku.

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail
pierwszalawka.pl/material/matematyka-liceum-klasa-4-dzial-03-graniastoslupy-i-ostroslupy