PIERWSZA ŁAWKA · 40 ZADAŃ Z JEDNEGO TEMATU · PR · MATEMATYKA · MATURA 2027 · POZIOM ROZSZERZONY

Planimetria: obliczenia i dowody geometryczne – 40 zadań

Planimetria na poziomie rozszerzonym: twierdzenia sinusów i cosinusów, rozwiązywanie trójkątów (także dwa przypadki), pola, okręgi wpisane i opisane, czworokąty wpisane i opisane, kąty w okręgu, podobieństwo, twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa oraz dowody geometryczne w stylu CKE („Wykaż, że…"). 40 zadań otwartych w formule matury rozszerzonej 2027 (2–6 pkt, razem 151 pkt).

Karta	Temat	Zadania
1	**Ściąga: Planimetria: obliczenia i dowody geometryczne. Pierwsze kroki** krótkie zadania za 2 pkt: twierdzenie sinusów i cosinusów, czworokąty wpisane i opisane, prosty dowód	7 zad. 14 pkt
2	**Jedna myśl, trzy kroki** zadania za 3 pkt: R trójkąta, trapez opisany, twierdzenie odwrotne do Talesa, dowód z r i polem oraz z przekątnymi równoległoboku, kąty w okręgu, pola figur podobnych	7 zad. 21 pkt
3	**Dowody i trójkąty** zadania za 3–4 pkt: ortocentrum, środek okręgu opisanego, dwa przypadki w trójkącie i trapezie, promienie r i R	7 zad. 25 pkt
4	**Planimetria w czterech krokach** zadania za 4 pkt: pola w trapezie, styczne, środkowa, sin 75°, środkowa i wysokość w trójkącie prostokątnym, dwie sieczne, okrąg wpisany w trójkąt prostokątny	7 zad. 28 pkt
5	**Zadania na 5 punktów** zadania za 5 pkt: równoważność z ułamkami, dwa przypadki (SSA), okrąg styczny do dwóch okręgów, $R/r \geq 1 + \sqrt{2}$, deltoid wpisany i opisany, pole z R	6 zad. 30 pkt
6	**Poziom końca arkusza** zadania za 5–6 pkt: wzór na środkową i kąt prosty, trapez prostokątny opisany, nierówność dla trójkąta, czworokąt wpisany z dwoma przypadkami, $\lvert AH\rvert = 2R\cos\alpha$	6 zad. 33 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Klucz na końcu: odpowiedzi, zasady oceniania etapami jak w CKE, pełne rozwiązania.

Zadania oryginalne. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: VII.R5, VII.R7, VII.R8, VII.3, VIII.1–VIII.5, VIII.8–VIII.12, VIII.R1, VIII.R2 (+ cel IV). Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

Ściąga: Planimetria: obliczenia i dowody geometryczne. Pierwsze kroki

krótkie zadania za 2 pkt: twierdzenie sinusów i cosinusów, czworokąty wpisane i opisane, prosty dowód

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 14 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Twierdzenie sinusów** (jest w karcie wzorów): $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$. Bok leży *naprzeciw* kąta o tej samej literze. Pułapka SSA: z $\sin\beta = s$ wychodzą dwa kąty, β i $180° - \beta$ – **sprawdź, czy suma z kątem α jest mniejsza od 180°**; „Rozważ wszystkie przypadki" znaczy zwykle dwa trójkąty.
- **Twierdzenie cosinusów i pole**: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Kąt rozwarty ma ujemny cosinus; $\sin(180° - \gamma) = \sin\gamma$, $\cos(180° - \gamma) = -\cos\gamma$. W karcie wzorów są: wzór Herona, $P = \frac{abc}{4R}$ i $P = r \cdot p$; **nie ma** wzoru na długość środkowej – wyprowadzasz go z twierdzenia cosinusów. Gdy znasz $\cos\gamma$, wartość $\sin\gamma$ obliczysz z jedynki trygonometrycznej $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$.
- **Rozwiązywanie trójkąta**: dwa boki i kąt między nimi – cosinusów; bok i dwa kąty – sinusów (trzeci kąt z sumy 180°); trzy boki – cosinusów dla najdłuższego boku. Dokładne wartości $\sin 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ otrzymasz ze wzoru na sinus sumy lub różnicy (np. $75° = 45° + 30°$).
- **Okręgi w trójkącie**: środek okręgu opisanego – przecięcie symetralnych, $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$; wpisanego – przecięcie dwusiecznych, $r = \frac{P}{p}$ (p – półobwód). Trójkąt prostokątny: $R = \frac{c}{2}$, $r = \frac{a+b-c}{2}$ (oba wzory są w karcie wzorów). Odcinki stycznych poprowadzonych z jednego punktu są równe.
- **Kąty w okręgu**: kąt wpisany ma połowę miary kąta środkowego opartego na tym samym łuku; kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe; kąt wpisany oparty na średnicy jest prosty. Pamiętaj o *położeniu* punktów (ten sam łuk, ta sama strona cięciwy) – w dowodzie napisz, dlaczego.
- **Czworokąty** (karta wzorów): wpisany w okrąg $\Leftrightarrow |\sphericalangle A| + |\sphericalangle C| = |\sphericalangle B| + |\sphericalangle D| = 180°$; opisany na okręgu $\Leftrightarrow |AB| + |CD| = |BC| + |DA|$ (boki *przeciwległe*). Pole czworokąta opisanego: $P = \frac{1}{2}r \cdot$ obwód. W trapezie równoramiennym opisanym na okręgu ramię jest równe połowie sumy podstaw.
- **Podobieństwo i Tales**: cechy kk, bkb, bbb – *przyporządkuj wierzchołki* (które wierzchołki się odpowiadają). Skala k: odcinki × k, pola × k^2. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa: jeżeli $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$, to $DE \parallel BC$ (napisz powołanie na to twierdzenie).

- **Wzorzec dowodu**: (1) oznaczenia i założenia (np. „trójkąt ostrokątny”), (2) plan (kąty / podobieństwo / trygonometria), (3) przekształcenia z uzasadnieniem każdego kroku, (4) zdanie „To należało wykazać”. **Sprawdzenie tezy dla kilku trójkątów lub liczb = 0 punktów.** Twierdzeń o dwusiecznej i o kącie między styczną a cięciwą nie wolno zakładać jako znanych – i nie są potrzebne.

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. (4 pkt, tw. cosinusów i sinusów) Boki trójkąta mają długości 9, 10 i 17. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt i promień okręgu opisanego na nim.

Etap I – kąt naprzeciw najdłuższego boku. $\cos\gamma = \frac{9^2 + 10^2 - 17^2}{2 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{-108}{180} = -\frac{3}{5}$,

$\sin\gamma = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$ ($\sin\gamma > 0$). ← 1 pkt

Etap II – pole i półobwód. $P = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5} = 36$, $p = \frac{9 + 10 + 17}{2} = 18$. ← 1 pkt

Etap III – promień okręgu wpisanego. $r = \frac{P}{p} = \frac{36}{18} = 2$. ← 1 pkt

Etap IV – promień okręgu opisanego. Z twierdzenia sinusów $2R = \frac{17}{\sin\gamma} = \frac{17 \cdot 5}{4}$, więc $R = \frac{85}{8}$. ← 1 pkt

Przykład 2. (3 pkt, dowód) W trójkącie *ABC* punkt *I* jest środkiem okręgu wpisanego. Wykaż, że $|\sphericalangle BIC| = 90° + \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC|$.

Etap I – założenia i oznaczenia. *I* leży na dwusiecznych kątów trójkąta. Niech α, β, γ będą miarami kątów *A*, *B*, *C*; $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Wtedy $|\sphericalangle IBC| = \frac{\beta}{2}$ i $|\sphericalangle ICB| = \frac{\gamma}{2}$. ← 1 pkt

Etap II – kąt w trójkącie *BIC*. $|\sphericalangle BIC| = 180° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 180° - \frac{\beta + \gamma}{2}$. ← 1 pkt

Etap III – wniosek. $\beta + \gamma = 180° - \alpha$, więc $|\sphericalangle BIC| = 180° - \frac{180° - \alpha}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2}$. To należało wykazać. ← 1 pkt

Uwaga: sprawdzenie dla jednego trójkąta (np. równobocznego) daje 0 pkt.

ZADANIA

Zadanie 1. W trójkącie *ABC* dane są: $|BC| = 5\sqrt{2}$, $|\sphericalangle BAC| = 45°$ oraz $|\sphericalangle ABC| = 60°$. Oblicz długość boku *AC*. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

PIERWSZA ŁAWKA

Zadanie 2. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 13$ oraz $|\sphericalangle ACB| = 120°$. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 3. Boki trójkąta mają długości 6, 11 i 14. Oblicz cosinus największego kąta tego trójkąta i rozstrzygnij, czy ten trójkąt jest ostrokątny. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 4. Trójkąt równoramienny ma ramiona długości 12 i pole równe $36\sqrt{3}$. Kąt między ramionami jest rozwarty. Oblicz długość podstawy tego trójkąta. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 5. Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu. Jego boki mają długości: $|AB| = 7$, $|BC| = 9$, $|CD| = 2x$ oraz $|DA| = x + 3$. Oblicz obwód tego czworokąta. Zapisz obliczenia.

___ / 2 pkt

PIERWSZA ŁAWKA

Jedna myśl, trzy kroki

zadania za 3 pkt: R trójkąta, trapez opisany, twierdzenie odwrotne do Talesa, dowód z r i polem oraz z przekątnymi równoległoboku, kąty w okręgu, pola figur podobnych

KARTA **2/6**

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 21 pkt

Zadanie 1. Boki trójkąta mają długości 13, 35 i 43. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie. Zapisz obliczenia.

___ / 3 pkt

Zadanie 2. Trapez równoramienny *ABCD* o podstawach *AB* i *CD* jest opisany na okręgu. Podstawy mają długości $|AB| = 20$ oraz $|CD| = 5$. Oblicz pole tego trapezu. Zapisz obliczenia.

___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Dowody i trójkąty

KARTA 3/6

zadania za 3–4 pkt: ortocentrum, środek okręgu opisanego, dwa przypadki w trójkącie i trapezie, promienie r i R

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 25 pkt

Zadanie 1. W trójkącie ostrokątnym *ABC* punkt *H* jest ortocentrum (punktem przecięcia wysokości *BE* i *CF*, gdzie $E \in AC$, $F \in AB$). Wykaż, że $|\sphericalangle BHC| = 180° - |\sphericalangle BAC|$. ___ / 3 pkt

Zadanie 2. Czworokąt wypukły *ABCD* jest opisany na okręgu o promieniu *r*. Wykaż, że pole tego czworokąta jest równe $r \cdot (|AB| + |CD|)$. ___ / 3 pkt

Zadanie 3. W trójkącie ostrokątnym *ABC* punkt *O* jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Wykaż, że $|\sphericalangle OBC| = 90° - |\sphericalangle BAC|$. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Planimetria w czterech krokach

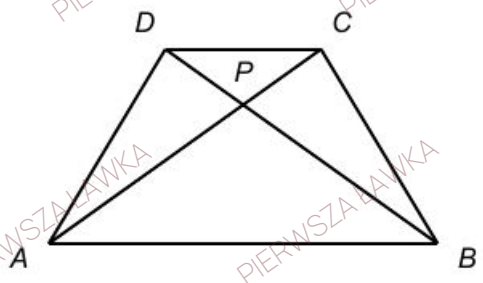
zadania za 4 pkt: pola w trapezie, styczne, środkowa, sin 75°, środkowa i wysokość w trójkącie prostokątnym, dwie sieczne, okrąg wpisany w trójkąt prostokątny

KARTA **4/6**

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 28 pkt

Zadanie 1. W trapezie *ABCD* podstawy *AB* i *CD* są różnej długości, a przekątne przecinają się w punkcie *P* (zobacz rysunek). Pola trójkątów *ABP*, *ADP* i *CDP* oznaczono odpowiednio P_1, P_2, P_3. Wykaż, że $P_2^2 = P_1 \cdot P_3$.

___ / 4 pkt



PIERWSZA ŁAWKA

Zadania na 5 punktów

zadania za 5 pkt: równoważność z ułamkami, dwa przypadki (SSA), okrąg styczny do dwóch okręgów, R/r ≥ 1 + √2, deltoid wpisany i opisany, pole z R

KARTA **5/6**

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 30 pkt

Zadanie 1. W trójkącie *ABC* oznaczono *a* = |*BC*|, *b* = |*AC*|, *c* = |*AB*|. Wykaż, że |∢ *ACB*| = 60° wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} = 1$. ___ / 5 pkt

Zadanie 2. W trójkącie *ABC* dane są: |*BC*| = 4, |*AC*| = $4\sqrt{2}$ oraz |∢ *BAC*| = 30°. Oblicz długość boku *AB*. Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia. ___ / 5 pkt

PIERWSZA ŁAWKA

Poziom końca arkusza

zadania za 5–6 pkt: wzór na środkową i kąt prosty, trapez prostokątny opisany, nierówność dla trójkąta, czworokąt wpisany z dwoma przypadkami, $|AH| = 2R\cos\alpha$

KARTA **6/6**

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 33 pkt

Zadanie 1. W trójkącie o bokach długości a, b, c środkowa poprowadzona do boku o długości c ma długość m_c. Wykaż, że $4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$. Wykaż następnie, że jeżeli $m_c = \frac{c}{2}$, to kąt leżący naprzeciw boku c jest prosty.

___ / 5 pkt

Zadanie 2. Trapez prostokątny $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $|\sphericalangle DAB| = 90°$) jest opisany na okręgu o promieniu $\frac{5}{2}$. Ramię BC ma długość 13. Oblicz długość przekątnej AC. Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia.

___ / 6 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Matura 2027 matematyka PR – Planimetria: obliczenia i dowody geometryczne – 40 zadań z kluczem i zasadami oceniania

Podgląd pokazał 9 z 47 stron. Pełna wersja: 47 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- 40 nowych zadań otwartych z matematyki na maturę rozszerzoną 2027 z jednego tematu: planimetria: obliczenia i dowody geometryczne – Planimetria na poziomie rozszerzonym: twierdzeni
- Na początku ściąga: najważniejsze wzory i twierdzenia z tematu (z zaznaczeniem, co jest w karcie wzorów CKE) i wzorcowe rozwiązanie zapisane tak, jak oczekują egzaminatorzy.
- Zadania w sześciu sekcjach – od krótkich za 2–3 pkt do wieloetapowych za 5–6 pkt (razem 151 pkt), w tym zadania „Wykaż, że…”.
- Polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE 2025–2026.
- Na końcu klucz: odpowiedzi, zasady oceniania etapami (za co kolejne punkty, uwagi w stylu CKE) i przykładowe pełne rozwiązania.
- 47 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.
- Wszystkie zadania są oryginalne – nie powtarzają zadań CKE ani naszych arkuszy próbnych, zestawów i „najczęstszych zadań maturalnych”.
- Wymagania: VII.R5, VII.R7, VII.R8, VII.3, VIII.1–VIII.5, VIII.8–VIII.12, VIII.R1, VIII.R2 (+ cel IV).
- Materiał przygotowany zgodnie z podstawą programową matematyki dla liceum i technikum (Dz.U.
- 2018 poz.
- 467 w brzmieniu Dz.U.
- 2024 poz.
- 1019), zakres rozszerzony – obowiązującą na maturze w latach 2027–2030.

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matura-2027-matematyka-rozszerzona-planimetria-dowody-geometryczne-40-zadan