PIERWSZA ŁAWKA · ZESTAW DZIAŁOWY · MATEMATYKA · KLASA 3 LO I TECHNIKUM · ZAKRES ROZSZERZONY

Dział 12. Granice ciągów i szereg geometryczny (zakres rozszerzony)

Granica ciągu, granice podstawowe, twierdzenia o działaniach na granicach, granice ilorazów wielomianów i potęg, różnica pierwiastków (sprzężenie), twierdzenie o trzech ciągach, granice niewłaściwe, zbieżny szereg geometryczny i jego suma, zastosowania: ułamki okresowe, nieskończone ciągi figur, równania z sumą szeregu. Dziewięć kart: teoria z przykładami, ćwiczenia, zadania typu maturalnego, dwie kartkówki (A i B) i sprawdzian (A i B) – z kluczem i zasadami oceniania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Granice ciągów i szereg geometryczny (zakres rozszerzony) – najważniejsze wiadomości** Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka	3 zad. 8 pkt
2	**Granice ciągów i szereg geometryczny (zakres rozszerzony) – ćwiczenia** Ćwiczę umiejętności z działu	8 zad. 21 pkt
3	**Granice ciągów i szereg geometryczny (zakres rozszerzony) – zadania typu maturalnego** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	7 zad. 22 pkt
4	**Kartkówka 1: granice ciągów – grupa A** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
5	**Kartkówka 1: granice ciągów – grupa B** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
6	**Kartkówka 2: szereg geometryczny – grupa A** 15 minut · 9 pkt	4 zad. 9 pkt
7	**Kartkówka 2: szereg geometryczny – grupa B** 15 minut · 9 pkt	4 zad. 9 pkt
8	**Sprawdzian: Granice ciągów i szereg geometryczny (zakres rozszerzony) – grupa A** 45 minut · 22 pkt	9 zad. 22 pkt
9	**Sprawdzian: Granice ciągów i szereg geometryczny (zakres rozszerzony) – grupa B** 45 minut · 22 pkt	9 zad. 22 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 przypomina najważniejsze wiadomości z działu i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku – od niej warto zacząć.
- Karta 2 to ćwiczenia, a karta 3 – zadania w formule matury 2027 (polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE).
- Karty 4–7 to dwie kartkówki (po 15 minut), każda w grupach A i B. Karty 8–9 to sprawdzian (45 minut) w grupach A i B – te same typy zadań i ta sama punktacja, inne liczby.
- Klucz na końcu zestawu zawiera odpowiedzi, przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE (kamienie milowe, błąd rachunkowy = −1 pkt).
- Osobny plik „Powtórka" zbiera definicje, wzory (z zaznaczeniem, które są w karcie wzorów CKE), typowe błędy i test „Sprawdź się".

Materiał oryginalny. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: VI.R1–VI.R2; także VI.5–VI.7; cele ogólne I, III.2, IV.3; warunki realizacji pkt 10. Miejsce w seriach podręczników: NE ZPiR kl. 3 (Ciągi: granice, szereg geometryczny) · Pazdro ZR kl. 3 (Ciągi) · GWO ZR kl. 3 (Ciągi: granice, szereg). Nazwy wydawnictw i serii podano tylko informacyjnie – materiał nie jest z nimi powiązany. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

PIERWSZA ŁAWKA

Granice ciągów i szereg geometryczny (zakres rozszerzony) – najważniejsze wiadomości

Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka

KARTA 1/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Granica ciągu.** Liczba g jest granicą ciągu (a_n), gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ prawie wszystkie wyrazy ciągu (wszystkie od pewnego miejsca) spełniają nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$. Piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ i mówimy, że ciąg jest **zbieżny** do g. Przykład: wyrazy ciągu $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ są coraz bliżej liczby 2, więc jego granica jest równa 2.
- **Granice podstawowe** (karta wzorów): $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ dla $k > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ dla $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla $a > 0$. Ciąg stały $a_n = c$ ma granicę c.
- **Twierdzenia o działaniach.** Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to granice sumy, różnicy i iloczynu ciągów są równe odpowiednio $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, a granica ilorazu $\frac{a_n}{b_n}$ jest równa $\frac{a}{b}$, o ile $b \neq 0$. Twierdzenia stosujemy **tylko do ciągów zbieżnych** – dlatego najpierw przekształcamy wyrażenie.
- **Iloraz wielomianów zmiennej *n*.** Dzielimy licznik i mianownik przez najwyższą potęgę n występującą w mianowniku. Gdy stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika, granica jest równa 0; gdy stopnie są równe – granica jest ilorazem współczynników przy najwyższych potęgach; gdy stopień licznika jest większy – ciąg ma granicę niewłaściwą $+\infty$ albo $-\infty$ (znak ilorazu tych współczynników).
- **Potęgi o różnych podstawach.** Dzielimy przez potęgę o największej podstawie, np. $\frac{2^n + 5^n}{5^n + 1} = \frac{(\frac{2}{5})^n + 1}{1 + (\frac{1}{5})^n}$, a to dąży do $\frac{0 + 1}{1 + 0} = 1$.
- **Różnica pierwiastków** (symbol $\infty - \infty$). Mnożymy i dzielimy przez sumę (sprzężenie): $\sqrt{n^2 + an} - n = \frac{an}{\sqrt{n^2 + an} + n} = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{a}{n}} + 1}$, więc dla $a > 0$ granica jest równa $\frac{a}{2}$.
- **Twierdzenie o trzech ciągach** (karta wzorów). Jeśli od pewnego miejsca $a_n \le b_n \le c_n$ oraz ciągi (a_n) i (c_n) mają tę samą granicę g, to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$. Stosujemy je, gdy w wyrazie ciągu występuje sin n, cos n, $(-1)^n$ albo pierwiastek n-tego stopnia z sumy potęg.
- **Granice niewłaściwe.** $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$ dla $q > 1$. Ciągi $(-1)^n$ i $(-2)^n$ nie mają granicy (ani właściwej, ani niewłaściwej). Wyrażenia typu $\frac{c}{n}$ dążą do 0, a symbole $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ wymagają przekształcenia.

- **Szereg geometryczny** $a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots$ (gdzie $a_1 \neq 0$) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|q| < 1$. Jego suma to $S = \frac{a_1}{1-q}$ (karta wzorów). Gdy $|q| \geq 1$, szereg jest rozbieżny i wzoru nie wolno stosować. Warunkiem jest $|q| < 1$, a nie $q > 0$ (typowy błąd z matury 2025).
- **Zastosowania.** Ułamek okresowy: $0,(27) = 0,27 + 0,0027 + \ldots = \frac{0,27}{1-0,01} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$. Nieskończony ciąg figur: ustal, który ciąg (boków, obwodów, pól) jest geometryczny, i oblicz jego iloraz – pola figur podobnych w skali k mają iloraz k^2. Równanie z sumą szeregu: najpierw warunek $|q| < 1$, na końcu odrzuć rozwiązania, które go nie spełniają.

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 5n + 1}{2n^2 + 7}$.

Dzielimy licznik i mianownik przez n^2: $\frac{3 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{7}{n^2}}$.

Ponieważ $\frac{5}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ i $\frac{7}{n^2}$ dążą do 0, granica jest równa $\frac{3}{2}$.

Przykład 2. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + 6n} - n)$.

$\sqrt{n^2 + 6n} - n = \frac{(n^2 + 6n) - n^2}{\sqrt{n^2 + 6n} + n} = \frac{6n}{\sqrt{n^2 + 6n} + n} = \frac{6}{\sqrt{1 + \frac{6}{n}} + 1}$.

Mianownik dąży do $1 + 1 = 2$, więc granica jest równa 3.

Przykład 3. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 5^n - 3^n}{5^{n+1} + 4}$.

$5^{n+1} = 5 \cdot 5^n$. Dzielimy licznik i mianownik przez 5^n: $\frac{2 - (\frac{3}{5})^n}{5 + \frac{4}{5^n}}$.

Ponieważ $(\frac{3}{5})^n$ i $\frac{4}{5^n}$ dążą do 0, granica jest równa $\frac{2}{5}$.

Przykład 4. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 7^n}$.

Dla każdego $n \geq 1$: $7^n \leq 3^n + 7^n \leq 2 \cdot 7^n$, więc $7 \leq \sqrt[n]{3^n + 7^n} \leq 7 \cdot \sqrt[n]{2}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} 7 \cdot \sqrt[n]{2} = 7 \cdot 1 = 7$. Z twierdzenia o trzech ciągach szukana granica jest równa 7.

Przykład 5. Zapisz liczbę 2,(45) w postaci ułamka zwykłego.

$0,(45) = 0,45 + 0,0045 + 0,000045 + \ldots$ – to szereg geometryczny: $a_1 = 0,45$, $q = 0,01$, $|q| < 1$.

$S = \frac{0,45}{1-0,01} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$, więc $2,(45) = 2\frac{5}{11} = \frac{27}{11}$.

Przykład 6. Rozwiąż równanie $2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \ldots = 5 - 2x$, w którym lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego.

Iloraz $q = x$; szereg jest zbieżny dla $|x| < 1$ i ma sumę $\frac{2}{1-x}$.

$\frac{2}{1-x} = 5 - 2x \Leftrightarrow 2 = (5 - 2x)(1 - x) \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 = 0$, $\Delta = 25$, $x = 3$ lub $x = \frac{1}{2}$.

$x = 3$ odrzucamy ($|3| \geq 1$ – szereg rozbieżny). Odpowiedź: $x = \frac{1}{2}$ (obie strony są wtedy równe 4).

ZADANIA

Zadanie 1. Oblicz granice. ___ / 4 pkt

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} =$ _____
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{2}{3})^n =$ _____
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{10} =$ _____
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+1}{n} =$ _____

Zadanie 2. Suma szeregu geometrycznego $6 + 3 + \frac{3}{2} + \ldots$ jest równa ___ / 1 pkt

A. 18 **B.** 9 **C.** $\frac{21}{2}$ **D.** 12

Zadanie 3. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 3 pkt

1. Szereg $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$ jest zbieżny.	**P**	**F**
2. Ciąg $a_n = (-1)^n$ ma granicę 0.	**P**	**F**
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n+1} = +\infty$	**P**	**F**

Podgląd • Pierwsza Ławka

Granice ciągów i szereg geometryczny (zakres rozszerzony) – ćwiczenia

KARTA 2/9

Ćwiczę umiejętności z działu

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 21 pkt

Zadanie 1. Oblicz granice. ___ / 4 pkt

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3 - n}{5n^3 + 4} =$ _____
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 + 1}{3n^3 - 2} =$ _____
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7 - 4n^2}{2n^2 + n} =$ _____
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3 + 2}{n^2 - 5} =$ _____

Zadanie 2. Oblicz granice. a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n)$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2 + n} - 2n)$ ___ / 3 pkt

Zadanie 3. Oblicz granice. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} + 2^n}{3^n - 5}$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^n - 1}{2^{2n+1}}$ ___ / 2 pkt

Zadanie 4. Zbieżny jest szereg geometryczny ___ / 1 pkt

A. $\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \ldots$

B. $9 - 6 + 4 - \ldots$

C. $1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \ldots$

D. $2 - 2 + 2 - \ldots$

Zadanie 5. Zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego. ___ / 3 pkt

1. $0,(7) =$ _____
2. $1,(23) =$ _____
3. $0,3(6) =$ _____

Granice ciągów i szereg geometryczny (zakres rozszerzony) – zadania typu maturalnego

KARTA 3/9

Polecenia i punktacja jak na maturze 2027

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 22 pkt

Zadanie 1. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+3)^3 - n^3}{2n^2 + 5}$. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 2. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3 + 7 + 11 + \ldots + (4n - 1)}{5n^2 - n}$, gdzie w liczniku jest suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 3. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{9n^2 + 12n - 5} - 3n)$. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

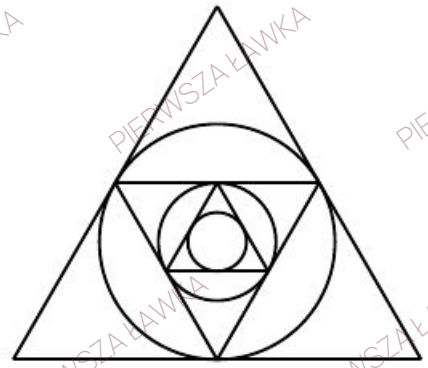
Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 4. Ciąg geometryczny (a_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, spełnia warunki $a_2 = 6$ oraz $a_1 + a_3 = 15$. Szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ jest zbieżny. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu. Zapisz obliczenia.

___ / 4 pkt

Zadanie 5. Trójkąt równoboczny T_1 ma bok długości 12. Wierzchołkami trójkąta T_2 są środki boków trójkąta T_1, wierzchołkami trójkąta T_3 – środki boków trójkąta T_2 i tak dalej. W każdy z tych trójkątów wpisano okrąg (zobacz rysunek). Oblicz sumę długości wszystkich tych okręgów. Zapisz obliczenia.

___ / 4 pkt



12

Podgląd • Pierwsza Ławka

Kartkówka 1: granice ciągów – grupa A

15 minut · 8 pkt

KARTA **4/9**

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

Zadanie 1. Oblicz granice. ___ / 3 pkt

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n^2 - n}{3n^2 + 2} =$ _____
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5 - n}{n^2 + 1} =$ _____
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 + 1}{4 - n^2} =$ _____

Zadanie 2. Granica $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + 3^n}{3^{n+1}}$ jest równa ___ / 1 pkt

A. $\dfrac{1}{3}$ **B.** 1 **C.** 0 **D.** $\dfrac{2}{3}$

Zadanie 3. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{7} = 1$	**P**	**F**
2. Ciąg $a_n = (-1)^n \cdot n$ ma granicę $+\infty$.	**P**	**F**

Zadanie 4. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + 10n} - n)$. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

PIERWSZA ŁAWKA

Kartkówka 1: granice ciągów – grupa B

15 minut · 8 pkt

KARTA **5/9**

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

Zadanie 1. Oblicz granice. ___ / 3 pkt

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n^2+3}{2n^2-n} =$ _____
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+7}{2n^3-1} =$ _____
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-n^3}{n^2+2} =$ _____

Zadanie 2. Granica $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n-2^n}{5^{n+1}}$ jest równa ___ / 1 pkt

A. $-\dfrac{1}{5}$ **B.** 1 **C.** $\dfrac{1}{5}$ **D.** 0

Zadanie 3. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{2}} = 1$	**P**	**F**
2. Ciąg $b_n = (-3)^n$ ma granicę $-\infty$.	**P**	**F**

Zadanie 4. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2-8n} - n)$. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

PIERWSZA ŁAWKA

Sprawdzian: Granice ciągów i szereg geometryczny (zakres rozszerzony) – grupa A

45 minut · 22 pkt

KARTA 8/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 22 pkt

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1-2n)(3n+4)}{n^2+1}$ jest równa ___ / 1 pkt

A. -2 **B.** -6 **C.** 0 **D.** 6

Zadanie 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma szeregu geometrycznego o pierwszym wyrazie 5 i ilorazie $-\frac{2}{3}$ jest równa ___ / 1 pkt

A. 15 **B.** -15 **C.** 3 **D.** 2

Zadanie 3. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Ciąg $a_n = (\frac{4}{5})^n + 2$ ma granicę 2.	**P**	**F**
2. Szereg $2 + \frac{5}{2} + \frac{25}{8} + \ldots$ jest zbieżny.	**P**	**F**

Zadanie 4. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^3-2n+1}{(2n+1)^3}$. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 5. Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2+8n} - 2n)$. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Granice ciągów i szereg geometryczny (zakres rozszerzony) – kartkówki, sprawdzian i karty pracy z powtórką, matematyka, klasa 3 LO i technikum...

Podgląd pokazał 11 z 34 stron. Pełna wersja: 34 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Granice ciągów i szereg geometryczny (zakres rozszerzony) – najważniejsze wiadomości – 3 zadania, 8 pkt
- Karta 2: Granice ciągów i szereg geometryczny (zakres rozszerzony) – ćwiczenia – 8 zadań, 21 pkt
- Karta 3: Granice ciągów i szereg geometryczny (zakres rozszerzony) – zadania typu maturalnego – 7 zadań, 22 pkt
- Karta 4: Kartkówka 1: granice ciągów – grupa A – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 5: Kartkówka 1: granice ciągów – grupa B – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 6: Kartkówka 2: szereg geometryczny – grupa A – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 7: Kartkówka 2: szereg geometryczny – grupa B – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 8: Sprawdzian: Granice ciągów i szereg geometryczny (zakres rozszerzony) – grupa A – 9 zadań, 22 pkt
- Karta 9: Sprawdzian: Granice ciągów i szereg geometryczny (zakres rozszerzony) – grupa B – 9 zadań, 22 pkt Karta 1 przypomina teorię i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku.

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matematyka-liceum-klasa-3-zr-dzial-12-granice-ciagow-i-szereg-geometryczny-zakres-r