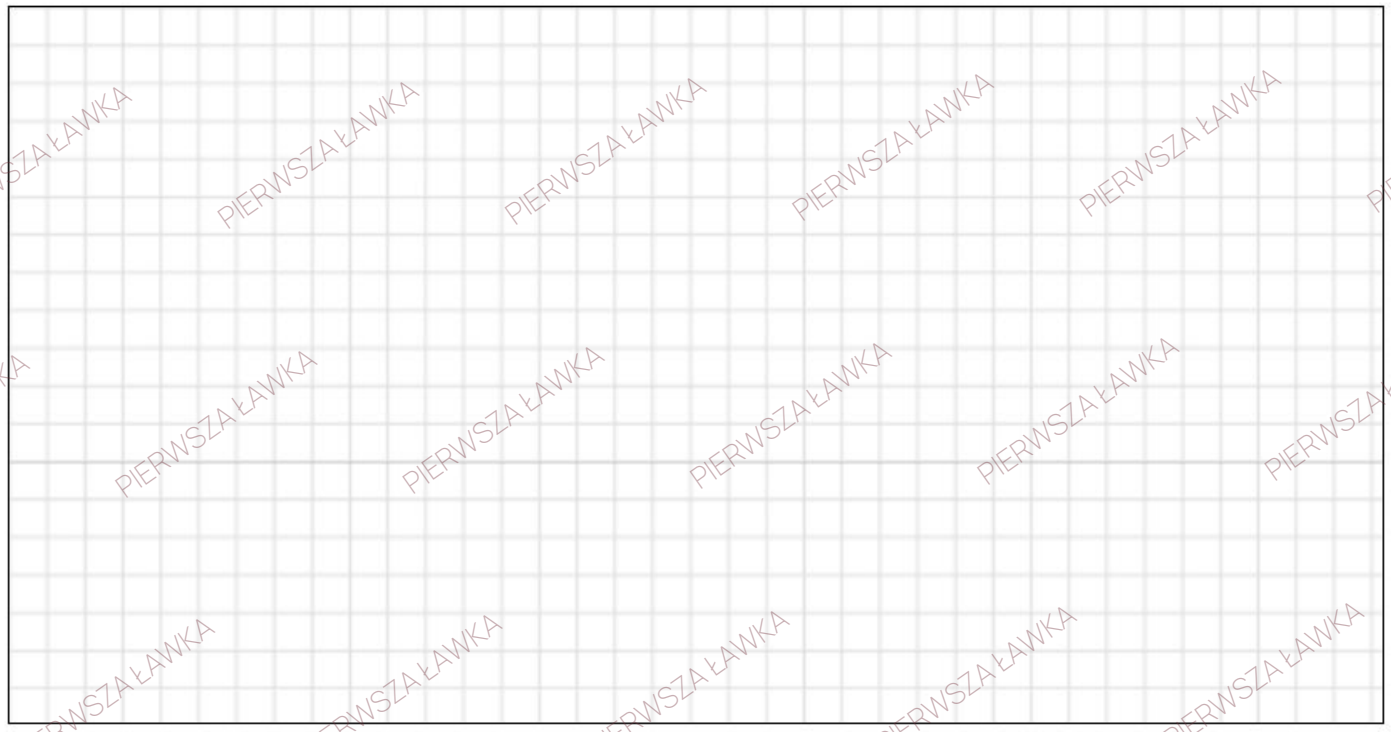
Zadanie 1. (0–2)

Wartość rynkowa W (w złotych) pewnej maszyny rolniczej po t latach od jej zakupu jest opisana wzorem $W(t) = W_0 \cdot a^t$, gdzie W_0 jest ceną nowej maszyny, a a jest stałą z przedziału $(0, 1)$. Po dwóch latach od zakupu wartość maszyny była równa 81 000 zł, a po pięciu latach – 59 049 zł. Oblicz cenę W_0 nowej maszyny oraz ustal, o ile procent maleje wartość tej maszyny w ciągu każdego roku. Zapisz obliczenia.



Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 1. (0–2)

Oblicz granicę $\lim_{n \to +\infty} (\sqrt{4n^2 + 12n + 1} - 2n)$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0–3)

Rzucamy cztery razy symetryczną sześcienną kostką do gry.
Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że iloczyn liczb oczek otrzymanych we wszystkich czterech rzutach będzie podzielny przez 4. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego. Zapisz obliczenia.

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 1. (0–2)

Stężenie C wolnego chloru w wodzie basenu (w mg/l) po t godzinach od zakończenia chlorowania jest opisane wzorem $C(t) = 2{,}5 \cdot a^t$, gdzie a jest stałą dodatnią. Po dwóch godzinach od zakończenia chlorowania stężenie chloru było równe 1,6 mg/l.

Oblicz a. Oblicz, po ilu pełnych godzinach od zakończenia chlorowania stężenie chloru będzie po raz pierwszy mniejsze niż 0,8 mg/l. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0–3)

Samochód przejeżdża przez sześć skrzyżowań z sygnalizacją świetlną. Na każdym skrzyżowaniu, niezależnie od pozostałych, kierowca trafia na zielone światło z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że kierowca trafi na zielone światło na co najmniej pięciu skrzyżowaniach. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego. Zapisz obliczenia.

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 10. (0–5)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest okrąg o_1 o równaniu $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$. Okrąg o_2 o promieniu $2\sqrt{5}$ jest styczny zewnętrznie do okręgu o_1 w punkcie $T = (1, 1)$.
Wyznacz równanie okręgu o_2 oraz równanie prostej, która jest styczna do obu okręgów w punkcie T. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0–6)

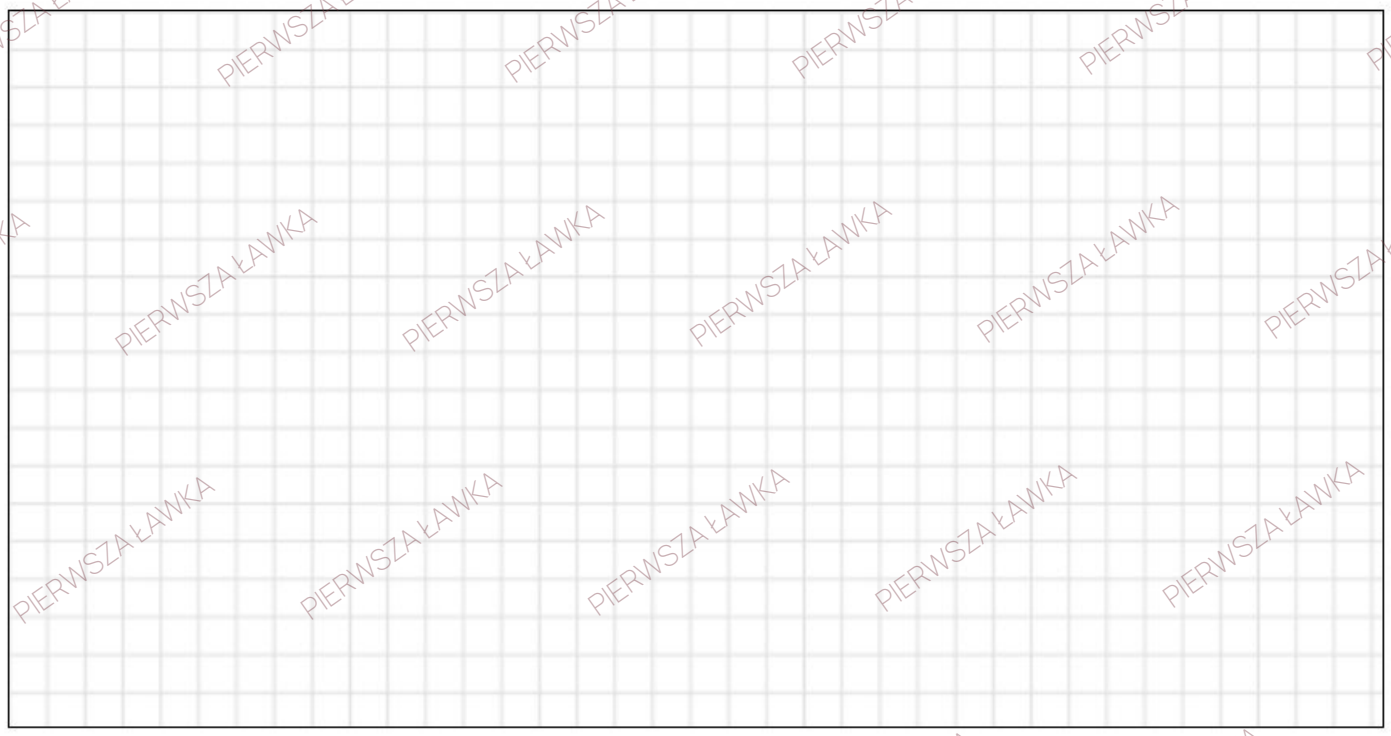
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $(x - 1)(x^2 - mx + 2m) = 0$ z niewiadomą x ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste, a suma kwadratów wszystkich rozwiązań tego równania jest nie większa od 46. Zapisz obliczenia.

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 2. (0–3)

Pracownik dojeżdża do biura samochodem jedną z dwóch tras: w $\frac{3}{5}$ wszystkich dni pracy jedzie przez centrum miasta, a w pozostałe dni – obwodnicą. Gdy jedzie przez centrum, spóźnia się do pracy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{12}$. Gdy jedzie obwodnicą, spóźnia się z prawdopodobieństwem $\frac{1}{5}$. Z dni pracy tego pracownika losujemy jeden dzień.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że tego dnia pracownik jechał obwodnicą, jeżeli wiadomo, że spóźnił się do pracy. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego. Zapisz obliczenia.



Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 5. (0–4)

Rozwiąż nierówność $|x + 1| - |x - 3| \geq x - 1$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 6. (0–4)

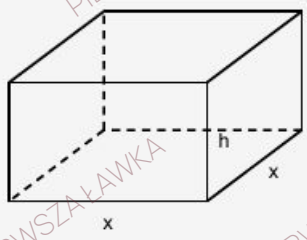
Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 8. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych $(a_1 + a_3 + a_5 + \ldots)$ jest równa 12.

Oblicz pierwszy wyraz i iloraz ciągu (a_n). Zapisz obliczenia.

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 12.

Rozważamy wszystkie pojemniki w kształcie prostopadłościanu bez pokrywy (otwarte od góry), których podstawą jest kwadrat. Każdy pojemnik wykonano z kawałka blachy o polu 48 dm² – pole powierzchni pojemnika (dno i cztery ściany boczne) jest równe 48 dm² (grubość blachy pomijamy). Niech x oznacza długość krawędzi podstawy, a h – wysokość pojemnika (w decymetrach) (zobacz rysunek).



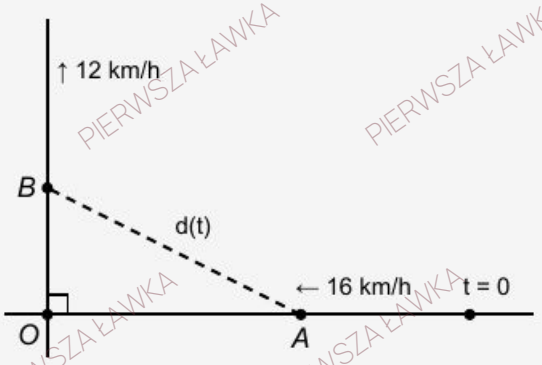
Zadanie 12.1. (0–3)

Wykaż, że objętość V pojemnika (w dm³) jako funkcja długości x krawędzi podstawy wyraża się wzorem $V(x) = 12x - \frac{1}{4}x^3$, gdzie $x \in (0, 4\sqrt{3})$.

PIERWSZA ŁAWKA

Zadanie 12.

Dwie proste drogi przecinają się pod kątem prostym w punkcie O. W chwili $t = 0$ rowerzysta A znajduje się na pierwszej drodze w odległości 20 km od punktu O i jedzie w kierunku punktu O ze stałą prędkością 16 km/h. W tej samej chwili rowerzysta B wyrusza z punktu O drugą drogą i jedzie ze stałą prędkością 12 km/h (zobacz rysunek). Rozważamy ruch rowerzystów od chwili $t = 0$ do chwili, w której rowerzysta A dojedzie do punktu O. Niech $d(t)$ oznacza odległość (w linii prostej, w km) między rowerzystami po t godzinach.



Zadanie 12.1. (0–2)

Wykaż, że $d(t) = 4\sqrt{25t^2 - 40t + 25}$, gdzie $t \in \langle 0, \frac{5}{4} \rangle$.

Podgląd • Pierwsza Ławka

Parametr – układ warunków równoważnych

Jak zamienić polecenie z parametrem na układ warunków, który jest mu równoważny, jak rozwiązać każdy warunek i jak CKE punktuje takie zadanie.

1. Zanim użyjesz wzorów Viète'a

- Wzory Viète'a $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ mówią coś tylko o pierwiastkach, które **istnieją**. Dlatego pierwszym warunkiem jest zawsze wyróżnik: „dwa różne rozwiązania" – $\Delta > 0$ (nie $\Delta \geq 0$!).
- Jeżeli przy x^2 stoi parametr, np. $(m-2)x^2 + 4x - m = 0$, to najpierw rozpatrz przypadek $m = 2$ (równanie liniowe – ma co najwyżej jedno rozwiązanie), a dopiero potem $m \neq 2$ i wzory Viète'a.
- Warunki mają być **równoważne** poleceniu, a nie tylko konieczne. Przykład: $x^2 + x + 1 = 0$ ma $x_1x_2 = 1 > 0$, a mimo to nie ma pierwiastków ($\Delta = -3$). Sam iloczyn nie wystarczy.
- Każdy warunek zapisz osobno, ponumeruj (1°, 2°, 3°…), rozwiąż osobno, a na końcu wyznacz **część wspólną** (oś liczbowa!).

2. Tabela: sformułowanie w poleceniu → układ warunków

Polecenie (pierwiastki równania $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$)	Układ warunków
dwa różne pierwiastki dodatnie	$\Delta > 0$, $x_1x_2 > 0$, $x_1 + x_2 > 0$
dwa różne pierwiastki ujemne	$\Delta > 0$, $x_1x_2 > 0$, $x_1 + x_2 < 0$
dwa różne pierwiastki tego samego znaku	$\Delta > 0$, $x_1x_2 > 0$
pierwiastki różnych znaków	$x_1x_2 = \frac{c}{a} < 0$ (wtedy $\Delta > 0$ samo)
liczba k leży między pierwiastkami	$a \cdot f(k) < 0$
oba pierwiastki w przedziale (p, q) (dla $a > 0$)	$\Delta > 0$, $f(p) > 0$, $f(q) > 0$, $p < x_w < q$
oba pierwiastki większe od k	$\Delta > 0$, $(x_1 - k)(x_2 - k) > 0$, $(x_1 - k) + (x_2 - k) > 0$

- W przedziale (p, q) nie wystarczy $f(p) > 0$ i $f(q) > 0$ – oba pierwiastki mogłyby leżeć poza przedziałem po tej samej stronie. Dlatego potrzebny jest warunek na wierzchołek $x_w = -\frac{b}{2a}$.

Dowody na maturze rozszerzonej (nierówności i geometria)

Jak zapisać dowód nierówności i dowód geometryczny tak, aby dostać komplet punktów – schematy, narzędzia, typowe błędy.

1. Dowód nierówności – schemat w czterech krokach

- **Krok 1.** Przenieś wszystko na jedną stronę: chcesz otrzymać $W \geq 0$ (albo $W > 0$).
- **Krok 2.** Pozbądź się mianowników – mnóż tylko przez liczby, o których **wiesz i piszesz**, że są dodatnie (np. „$xy > 0$, bo $x > 0$ i $y > 0$”). Mnożenie przez liczbę ujemną zmienia zwrot nierówności.
- **Krok 3.** Doprowadź wyrażenie do postaci, której znak widać: kwadrat $(\ldots)^2 \geq 0$, suma kwadratów, iloczyn czynników o znanych znakach, np. $(x - y)^2(x^2 + xy + y^2)$.
- **Krok 4.** Napisz słowami, dlaczego wyrażenie jest nieujemne („kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny, a suma liczb dodatnich jest dodatnia”), zaznacz, że przekształcenia były równoważne, i zakończ: „To należało wykazać.”
- Przykład: dla $x, y > 0$ wykaż, że $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$. Mnożymy przez $xy > 0$:

  $x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$ – prawda, bo kwadrat jest nieujemny. To należało wykazać.

2. Narzędzia algebraiczne, które najczęściej zamykają dowód

- $a^2 + b^2 \geq 2ab$, bo $(a - b)^2 \geq 0$; ogólniej $(pa - qb)^2 \geq 0$ daje $p^2a^2 + q^2b^2 \geq 2pqab$.
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ – są w karcie wzorów.
- $a^2 + ab + b^2 = (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$ – ten czynnik trzeba uzasadnić (to nie jest „suma kwadratów”).
- Grupowanie: $x^4 - x^3y + y^4 - xy^3 = (x - y)(x^3 - y^3)$; czynniki $x - y$ i $x^3 - y^3$ mają zawsze ten sam znak.
- Nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną (jest w karcie wzorów) – wolno z niej korzystać, ale trzeba zaznaczyć, że liczby są dodatnie (nieujemne).
- Sposób „z pochodną” (CKE 2025, 2026): dla funkcji pomocniczej jednej zmiennej wyznacz najmniejszą wartość – jeśli jest nieujemna, nierówność zachodzi.

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Matura 2027 z matematyki (poziom rozszerzony) – pakiet 4 arkuszy próbnych z zasadami oceniania

Podgląd pokazał 10 z 99 stron. Pełna wersja: 99 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Matura 2027 z matematyki – poziom rozszerzony, arkusz próbny 1 z zasadami oceniania i powtórką
- Matura 2027 z matematyki – poziom rozszerzony, arkusz próbny 3 z zasadami oceniania i powtórką
- Matura 2027 z matematyki – poziom rozszerzony, arkusz próbny 4 z zasadami oceniania i powtórką
- Matura 2027 z matematyki – poziom rozszerzony, arkusz próbny 2 z zasadami oceniania i powtórką

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matura-2027-matematyka-rozszerzona-pakiet-arkuszy-probnych