PIERWSZA ŁAWKA · ZESTAW DZIAŁOWY · MATEMATYKA · KLASA 2 LO I TECHNIKUM · ZAKRES ROZSZERZONY

Dział 12. Wielomiany i wyrażenia wymierne (zakres rozszerzony)

Dzielenie wielomianu przez dwumian x − a, schemat Hornera, twierdzenie Bézouta i reszta z dzielenia, pierwiastki całkowite, rozkład na czynniki (grupowanie, wzory $a^3 \pm b^3$), równania i nierówności wielomianowe (wężyk, krotność pierwiastka), dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych, równania V(x)/W(x) = 0, równania i nierówności wymierne, dowód monotoniczności funkcji z definicji. Dziewięć kart: teoria z przykładami, ćwiczenia, zadania typu maturalnego, dwie kartkówki (A i B) i sprawdzian (A i B) – z kluczem i zasadami oceniania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Wielomiany i wyrażenia wymierne (zakres rozszerzony) – najważniejsze wiadomości** Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka	4 zad. 8 pkt
2	**Wielomiany i wyrażenia wymierne (zakres rozszerzony) – ćwiczenia** Ćwiczę umiejętności z działu	8 zad. 26 pkt
3	**Wielomiany i wyrażenia wymierne (zakres rozszerzony) – zadania typu maturalnego** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	6 zad. 20 pkt
4	**Kartkówka 1: dzielenie wielomianów, twierdzenie Bézouta, pierwiastki całkowite – grupa A** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
5	**Kartkówka 1: dzielenie wielomianów, twierdzenie Bézouta, pierwiastki całkowite – grupa B** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
6	**Kartkówka 2: nierówności wielomianowe i wymierne – grupa A** 15 minut · 9 pkt	4 zad. 9 pkt
7	**Kartkówka 2: nierówności wielomianowe i wymierne – grupa B** 15 minut · 9 pkt	4 zad. 9 pkt
8	**Sprawdzian: Wielomiany i wyrażenia wymierne (zakres rozszerzony) – grupa A** 45 minut · 23 pkt	10 zad. 23 pkt

9	**Sprawdzian: Wielomiany i wyrażenia wymierne (zakres rozszerzony) – grupa B** 45 minut · 23 pkt	10 zad. 23 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 przypomina najważniejsze wiadomości z działu i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku – od niej warto zacząć.
- Karta 2 to ćwiczenia, a karta 3 – zadania w formule matury 2027 (polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE).
- Karty 4–7 to dwie kartkówki (po 15 minut), każda w grupach A i B. Karty 8–9 to sprawdzian (45 minut) w grupach A i B – te same typy zadań i ta sama punktacja, inne liczby.
- Klucz na końcu zestawu zawiera odpowiedzi, przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE (kamienie milowe, błąd rachunkowy = −1 pkt).
- Osobny plik „Powtórka” zbiera definicje, wzory (z zaznaczeniem, które są w karcie wzorów CKE), typowe błędy i test „Sprawdź się”.

Materiał oryginalny. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: II.R1–II.R3, II.R5–II.R6, III.R1–III.R2, III.R7, V.R3; cele ogólne I, III.1, IV.1; dowody PR pkt 2–3. Miejsce w seriach podręczników: NE ZPiR kl. 2 (Wielomiany, Funkcja wymierna) · Pazdro ZR kl. 2 (Wielomiany), wyrażenia wymierne – Pazdro ZR kl. 3 · GWO ZR kl. 2 (Wielomiany), wyrażenia wymierne – GWO ZR kl. 3. Nazwy wydawnictw i serii podano tylko informacyjnie – materiał nie jest z nimi powiązany. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

PIERWSZA ŁAWKA

Wielomiany i wyrażenia wymierne (zakres rozszerzony) – najważniejsze wiadomości

Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka

KARTA 1/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Dzielenie przez dwumian $x - a$.** Dla każdego wielomianu W istnieją jednoznacznie wyznaczone: wielomian Q (iloraz, stopnia o 1 mniejszego) i liczba r (reszta), takie że $W(x) = (x - a) \cdot Q(x) + r$. **Schemat Hornera:** w pierwszym wierszu piszemy współczynniki W – także zera przy brakujących potęgach; pierwszy przepisujemy, każdy następny wynik to poprzedni wynik razy a plus współczynnik z góry. Ostatnia liczba to reszta, pozostałe – współczynniki ilorazu.

$W(x) = x^3 - 4x + 5$, $a = -2$	1	0	−4	5
wyniki	1	$1 \cdot (-2) + 0 = -2$	$(-2) \cdot (-2) - 4 = 0$	$0 \cdot (-2) + 5 = 5$
Zatem $x^3 - 4x + 5 = (x + 2)(x^2 - 2x) + 5$: iloraz $x^2 - 2x$, reszta 5.				

- **Twierdzenie Bézouta.** Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x - a$ jest równa $W(a)$. Zatem W jest podzielny przez $x - a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(a) = 0$ (liczba a jest pierwiastkiem W). Dzielenie przez $x + 2$ to dzielenie przez $x - (-2)$ – reszta to $W(-2)$. Twierdzenia Bézouta i schematu Hornera nie ma w karcie wzorów CKE.
- **Pierwiastki całkowite.** Jeżeli wielomian o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek całkowity $p \neq 0$, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego. Sprawdzamy więc dzielniki wyrazu wolnego (dodatnie i ujemne), a po znalezieniu pierwiastka p dzielimy W przez $x - p$ i dalej rozkładamy iloraz.
- **Rozkład na czynniki:** wyłączanie wspólnego czynnika, grupowanie wyrazów, np. $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = x^2(x + 2) - 9(x + 2) = (x + 2)(x - 3)(x + 3)$, oraz wzory (są w karcie wzorów): $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$. Trójmian $a^2 \pm ab + b^2$ (dla $b \neq 0$) nie ma pierwiastków – dalej go nie rozkładamy.
- **Nierówność wielomianowa – „wężyk”.** 1) Rozłóż W na czynniki, wyznacz pierwiastki i ich krotności. 2) Zaznacz pierwiastki na osi. 3) Szkic zaczynaj z prawej strony: nad osią, gdy współczynnik przy najwyższej potędze jest dodatni, pod osią – gdy ujemny. 4) Przy pierwiastku nieparzystej krotności wykres przechodzi na drugą stronę osi, przy pierwiastku parzystej krotności (np. z czynnika $(x - 1)^2$) „odbija się”. 5) Odczytaj zbiór; przy ≥ i ≤ dołącz pierwiastki.
- **Wyrażenia wymierne.** Dziedzina: mianowniki różne od 0. Dodawanie i odejmowanie: rozłóż mianowniki na czynniki, sprowadź do najmniejszego wspólnego mianownika, dodaj liczniki i uprość. Skracamy tylko czynniki, nigdy składniki: $\frac{x+5}{x+3} \neq \frac{5}{3}$.

- **Równania wymierne.** Najpierw dziedzina. $\frac{V(x)}{W(x)} = 0 \Leftrightarrow V(x) = 0$ i $W(x) \neq 0$. Równanie z kilkoma ułamkami mnożymy przez wspólny mianownik (w dziedzinie jest różny od 0) i odrzucamy rozwiązania spoza dziedziny.
- **Nierówności wymierne.** Nie mnożymy przez mianownik, którego znaku nie znamy. Przenosimy wszystko na jedną stronę i sprowadzamy do wspólnego mianownika; $\frac{V(x)}{W(x)} > 0 \Leftrightarrow V(x) \cdot W(x) > 0$ (analogicznie $<$), a $\frac{V(x)}{W(x)} \geq 0 \Leftrightarrow V(x) \cdot W(x) \geq 0$ i $W(x) \neq 0$. Dalej – jak nierówność wielomianowa.
- **Monotoniczność z definicji (V.R3).** Funkcja f jest rosnąca w przedziale I, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in I$, takich że $x_1 < x_2$, zachodzi $f(x_1) < f(x_2)$ (malejąca – gdy $f(x_1) > f(x_2)$). Dowód: bierzemy dowolne $x_1 < x_2$ z przedziału, zapisujemy różnicę $f(x_2) - f(x_1)$ w postaci iloczynu lub ilorazu i ustalamy jej znak z założeń ($x_2 - x_1 > 0$, znaki mianowników w przedziale). Sprawdzenie dla kilku liczb nie jest dowodem.

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. Podziel wielomian $W(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ przez dwumian $x - 3$ i rozłóż W na czynniki liniowe.

Schemat Hornera dla $a = 3$: współczynniki 2, −3, −11, 6; wyniki: 2, $2 \cdot 3 - 3 = 3$, $3 \cdot 3 - 11 = -2$, $-2 \cdot 3 + 6 = 0$.

$W(x) = (x - 3)(2x^2 + 3x - 2)$, reszta 0. Trójmian: $\Delta = 9 + 16 = 25$, pierwiastki $\frac{1}{2}$ i −2, więc $2x^2 + 3x - 2 = (2x - 1)(x + 2)$.

$W(x) = (x - 3)(2x - 1)(x + 2)$.

Przykład 2. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 - 5x + 2$ przez dwumian $x - 2$ jest równa 4. Oblicz a oraz resztę z dzielenia W przez $x + 1$.

Z twierdzenia Bézouta $W(2) = 4$: $8 + 4a - 10 + 2 = 4$, $4a = 4$, $a = 1$.

Reszta z dzielenia przez $x + 1 = x - (-1)$: $W(-1) = -1 + 1 + 5 + 2 = 7$.

Przykład 3. Rozwiąż nierówność $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 > 0$.

Pierwiastków całkowitych szukamy wśród dzielników liczby −6: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6.

$W(-1) = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$.

Horner dla $a = -1$: 1, 1, −6, reszta 0, więc $W(x) = (x + 1)(x^2 + x - 6) = (x + 1)(x + 3)(x - 2)$.

Pierwiastki −3, −1, 2 (jednokrotne), współczynnik przy x^3 dodatni – wężyk od prawej nad osią. Odpowiedź: $x \in (-3, -1) \cup (2, +\infty)$.

Przykład 4. Rozwiąż nierówność $(x - 1)^2(x + 3)(2 - x) > 0$.

Pierwiastki: −3 (jednokrotny), 1 (dwukrotny), 2 (jednokrotny). Współczynnik przy x^4: $1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1 < 0$ – wężyk od prawej pod osią.

Przy 2 i −3 zmiana znaku, przy 1 – „odbicie". Znak dodatni na (−3, 1) i (1, 2) (w $x = 1$ wartość 0 – wykluczamy).

Odpowiedź: $x \in (-3, 1) \cup (1, 2)$.

Przykład 5. Wykonaj odejmowanie $\frac{2}{x-1} - \frac{x+3}{x^2-1}$ i podaj konieczne założenia.

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, założenie: $x \neq 1$ i $x \neq -1$.

$\frac{2(x+1)-(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$.

Przykład 6. Rozwiąż nierówność $\frac{x+2}{x-3} \leq 2$.

Dziedzina: $x \neq 3$. $\frac{x+2}{x-3} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+2-2x+6}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{8-x}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-8}{x-3} \geq 0$.

$(x-8)(x-3) \geq 0$ i $x \neq 3$: $x \in (-\infty, 3) \cup \langle 8, +\infty)$. (Błąd: pomnożenie przez $x-3$ bez rozważenia znaku daje tylko $x \geq 8$.)

Przykład 7. Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ jest malejąca w przedziale $(3, +\infty)$.

$f(x) = \frac{2(x-3)+7}{x-3} = 2 + \frac{7}{x-3}$. Niech $3 < x_1 < x_2$.

$f(x_1) - f(x_2) = \frac{7}{x_1-3} - \frac{7}{x_2-3} = \frac{7(x_2-x_1)}{(x_1-3)(x_2-3)}$.

$x_2 - x_1 > 0$, $x_1 - 3 > 0$, $x_2 - 3 > 0$, więc różnica jest dodatnia: $f(x_1) > f(x_2)$. Funkcja jest malejąca w $(3, +\infty)$. To należało wykazać.

ZADANIA

Zadanie 1. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 - 2x + 5$ przez dwumian. ___ / 3 pkt

1. $x - 1$: _____ 2. $x + 1$: _____ 3. $x - 2$: _____

Zadanie 2. Liczba -2 jest pierwiastkiem wielomianu ___ / 1 pkt

A. $x^3 + 2x^2 + 1$ **B.** $x^3 - 8$ **C.** $x^3 + 8$ **D.** $x^2 + 4$

Zadanie 3. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 3 pkt

1. $x^3 - 27 = (x-3)(x^2+3x+9)$	**P**	**F**
2. Wyrażenie $\frac{x+4}{x+7}$ po skróceniu jest równe $\frac{4}{7}$.	**P**	**F**
3. Jeżeli wielomian $x^3 - 2x + 4$ ma pierwiastek całkowity, to jest on dzielnikiem liczby 4.	**P**	**F**

Zadanie 4. Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $x(x-2)^2 > 0$ jest ___ / 1 pkt

A. $(-\infty, 0)$ **B.** $(2, +\infty)$

C. $(0, +\infty)$ **D.** $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

Podgląd • Pierwsza Ławka

Wielomiany i wyrażenia wymierne (zakres rozszerzony) – ćwiczenia

KARTA 2/9

Ćwiczę umiejętności z działu

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 26 pkt

Zadanie 1. Podziel wielomian $W(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ przez dwumian $x - 2$ schematem Hornera, a następnie rozłóż W na czynniki liniowe. ___ / 3 pkt

Zadanie 2. Wyznacz liczby a i b, dla których wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$ jest podzielny przez dwumiany $x - 1$ oraz $x + 2$. Rozłóż W na czynniki. ___ / 3 pkt

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie pierwiastki całkowite wielomianu $W(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ i rozłóż ten wielomian na czynniki. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Kartkówka 1: dzielenie wielomianów, twierdzenie Bézouta, pierwiastki całkowite – grupa A

15 minut · 8 pkt

KARTA 4/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

Zadanie 1. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 1$ przez dwumian. ___ / 2 pkt

1. $x - 1$: _____ 2. $x + 2$: _____

Zadanie 2. Pierwiastkiem całkowitym wielomianu $W(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ jest liczba ___ / 1 pkt

A. 3 **B.** 2 **C.** 6 **D.** −1

Zadanie 3. Podziel wielomian $W(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ przez dwumian $x - 2$ i rozłóż W na czynniki liniowe. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 4. Wyznacz liczbę a, dla której wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 - 4x + 8$ jest podzielny przez dwumian $x + 2$. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Kartkówka 1: dzielenie wielomianów, twierdzenie Bézouta, pierwiastki całkowite – grupa B

15 minut · 8 pkt

KARTA 5/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

Zadanie 1. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 4$ przez dwumian.

___ / 2 pkt

1. $x - 1$: _____ 2. $x + 2$: _____

Zadanie 2. Pierwiastkiem całkowitym wielomianu $W(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ jest liczba

___ / 1 pkt

A. -1 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

Zadanie 3. Podziel wielomian $W(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ przez dwumian $x - 2$ i rozłóż W na czynniki liniowe. Zapisz obliczenia.

___ / 3 pkt

Zadanie 4. Wyznacz liczbę a, dla której wielomian $W(x) = 2x^3 + ax^2 - x + 3$ jest podzielny przez dwumian $x - 1$. Zapisz obliczenia.

___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Sprawdzian: Wielomiany i wyrażenia wymierne (zakres rozszerzony) – grupa A

45 minut · 23 pkt

KARTA 8/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 23 pkt

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 5$ przez dwumian $x + 2$ jest równa

___ / 1 pkt

A. -5 **B.** 3 **C.** -13 **D.** 5

Zadanie 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyrażenie $27x^3 - 8$ jest równe

___ / 1 pkt

A. $(3x - 2)(9x^2 + 6x + 4)$ **B.** $(3x - 2)(9x^2 + 4)$

C. $(3x - 2)(9x^2 - 6x + 4)$ **D.** $(3x - 2)^3$

Zadanie 3. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

___ / 1 pkt

1. Liczba 3 jest pierwiastkiem wielomianu $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$.	**P**	**F**
2. Wielomian $x^3 + 5x + 7$ ma pierwiastek całkowity.	**P**	**F**

Zadanie 4. Podziel wielomian $W(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4$ przez dwumian $x - 2$. Zapisz W w postaci $(x - a) \cdot Q(x) + r$. Zapisz obliczenia.

___ / 2 pkt

Zadanie 5. Wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 + bx - 4$ jest podzielny przez dwumian $x - 2$, a przy dzieleniu przez dwumian $x + 1$ daje resztę -6. Oblicz a i b. Zapisz obliczenia.

___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Sprawdzian: Wielomiany i wyrażenia wymierne (zakres rozszerzony) – grupa B

45 minut · 23 pkt

KARTA 9/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 23 pkt

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^4 + 2x^3 - x + 4$ przez dwumian $x + 1$ jest równa

___ / 1 pkt

A. 2 **B.** 6 **C.** −4 **D.** 4

Zadanie 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyrażenie $64x^3 + 1$ jest równe

___ / 1 pkt

A. $(4x + 1)(16x^2 - 4x + 1)$ **B.** $(4x + 1)(16x^2 + 4x + 1)$

C. $(4x + 1)(16x^2 + 1)$ **D.** $(4x + 1)^3$

Zadanie 3. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

___ / 1 pkt

1. Liczba −2 jest pierwiastkiem wielomianu $x^3 + x^2 - 4x - 4$.	**P**	**F**
2. Wielomian $x^3 + 3x + 5$ ma pierwiastek całkowity.	**P**	**F**

Zadanie 4. Podziel wielomian $W(x) = 2x^3 + x^2 - 7$ przez dwumian $x + 1$. Zapisz W w postaci $(x - a) \cdot Q(x) + r$. Zapisz obliczenia.

___ / 2 pkt

Zadanie 5. Wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + 6$ jest podzielny przez dwumian $x - 1$, a przy dzieleniu przez dwumian $x + 2$ daje resztę −12. Oblicz a i b. Zapisz obliczenia.

___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Wielomiany i wyrażenia wymierne (zakres rozszerzony) – kartkówki, sprawdzian i karty pracy z powtórką, matematyka, klasa 2 LO i technikum

Podgląd pokazał 10 z 33 stron. Pełna wersja: 33 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Wielomiany i wyrażenia wymierne (zakres rozszerzony) – najważniejsze wiadomości – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 2: Wielomiany i wyrażenia wymierne (zakres rozszerzony) – ćwiczenia – 8 zadań, 26 pkt
- Karta 3: Wielomiany i wyrażenia wymierne (zakres rozszerzony) – zadania typu maturalnego – 6 zadań, 20 pkt
- Karta 4: Kartkówka 1: dzielenie wielomianów, twierdzenie Bézouta, pierwiastki całkowite – grupa A – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 5: Kartkówka 1: dzielenie wielomianów, twierdzenie Bézouta, pierwiastki całkowite – grupa B – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 6: Kartkówka 2: nierówności wielomianowe i wymierne – grupa A – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 7: Kartkówka 2: nierówności wielomianowe i wymierne – grupa B – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 8: Sprawdzian: Wielomiany i wyrażenia wymierne (zakres rozszerzony) – grupa A – 10 zadań, 23 pkt
- Karta 9: Sprawdzian: Wielomiany i wyrażenia wymierne (zakres rozszerzony) – grupa B – 10 zadań, 23 pkt Karta 1 przypomina teorię i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku.

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matematyka-liceum-klasa-2-zr-dzial-12-wielomiany-i-wyrazenia-wymierne-zakres-rozsze