PIERWSZA ŁAWKA · NAJCZĘSTSZE ZADANIA MATURALNE · PR · MATEMATYKA · MATURA 2027 · POZIOM ROZSZERZONY

J. Pochodna: „wykaż wzór” + optymalizacja, styczna, granice, model wykładniczy

Wiązka z końca arkusza rozszerzonego: „Wykaż, że … wyraża się wzorem …” i optymalizacja pochodną z uzasadnieniem ekstremum w dziedzinie; styczna do wykresu (także równoległa i prostopadła do danej prostej, pochodna funkcji złożonej), granice funkcji (także jednostronne), model wykładniczy z kontekstu (zadanie 1 arkusza). Sześć kart: wzorcowe rozwiązania i zasady oceniania CKE, trening, zadania na poziomie matury, zadania trudniejsze i test w grupach A i B – z kluczem i schematami punktowania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Pochodna: „wykaż wzór” + optymalizacja, styczna, granice, model wykładniczy – jak rozwiązywać i jak oceni to CKE** Wzorcowe rozwiązania, pułapki, rozgrzewka	4 zad. 11 pkt
2	**Pochodna: „wykaż wzór” + optymalizacja, styczna, granice, model wykładniczy – trening** Zadania krok po kroku	7 zad. 17 pkt
3	**Pochodna: „wykaż wzór” + optymalizacja, styczna, granice, model wykładniczy – zadania na poziomie matury** Polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE 2025–2026	6 zad. 23 pkt
4	**Pochodna: „wykaż wzór” + optymalizacja, styczna, granice, model wykładniczy – zadania trudniejsze** Dla ambitnych – nietypowe ujęcia tego samego typu	5 zad. 18 pkt
5	**Test: Pochodna: „wykaż wzór” + optymalizacja, styczna, granice, model wykładniczy – grupa A** 60 minut · 16 pkt	5 zad. 16 pkt
6	**Test: Pochodna: „wykaż wzór” + optymalizacja, styczna, granice, model wykładniczy – grupa B** 60 minut · 16 pkt	5 zad. 16 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 pokazuje, jak CKE ocenia ten typ zadań (kamienie milowe, typowe uwagi w zasadach oceniania) oraz wzorcowe rozwiązania krok po kroku.
- Karty 2–4 prowadzą od treningu, przez zadania na poziomie matury, do zadań trudniejszych.
- Karty 5 i 6 to równoległy test (grupa A i B) z punktacją jak na maturze.
- Klucz zawiera odpowiedzi, przykładowe pełne rozwiązania i zasady oceniania w stylu CKE 2026.
- Osobny plik „Powtórka" zbiera wzory (z podziałem: są w karcie wzorów / trzeba pamiętać), typowe błędy z sprawozdań CKE i test „Sprawdź się".

Materiał oryginalny – żadne zadanie nie jest kopią zadania CKE. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: XIII.R1, XIII.R3–XIII.R6, V.14 (VI.R1 w teorii; w tle X.5, VIII.8, IX.R4); cele ogólne III.1, IV.1, IV.4. Częstość na maturze: optymalizacja pochodną (x.2, 4 pkt) i „wykaż wzór" (x.1, 2–3 pkt) – w 4 z 4 arkuszy majowych 2023–2026 (16 + 9 pkt); w arkuszach diagnostycznych/pokazowych optymalizacja 3 z 3, „wykaż wzór" 2 z 3; model wykładniczy – 3 z 4 (2023–2025, zad. 1, 2 pkt); styczna – 2 z 4 (2023, 2024, 3 pkt); granica – 2 z 4 (funkcji 2024, ciągu 2026, 2 pkt). Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

PIERWSZA ŁAWKA

Pochodna: „wykaż wzór" + optymalizacja, styczna, granice, model wykładniczy – jak rozwiązywać i jak oceni to CKE

Wzorcowe rozwiązania, pułapki, rozgrzewka

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 11 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Gdzie w arkuszu i ile to warte.** Zadanie 1 (2 pkt): model wykładniczy z kontekstu – w 2023, 2024 i 2025 r. (rozpad, stygnięcie, bakterie), w 2026 r. zastąpiony granicą ciągu. Zadania 2–4: granica funkcji (2024, 2 pkt – 31%) i styczna do wykresu (2023 i 2024, 3 pkt – 60% i 50%). **Ostatnie zadanie arkusza** – co roku wiązka: x.1 „Wykaż, że … wyraża się wzorem …" (2–3 pkt; 2025 – 22%, 2026 – 16%) i x.2 optymalizacja pochodną (4 pkt; 24%, 42%, 47%). Rachunek różniczkowy (XIII.R1–XIII.R6) dał w latach 2023–2026 łącznie 24 punkty.
- **„Wykaż wzór" (x.1) – plan.** 1) Nazwij zmienne i podaj ich sens z jednostką („x – długość krótszej krawędzi podstawy w cm"). 2) Zapisz związek wynikający z treści: dana objętość lub obwód, twierdzenie Pitagorasa, podobieństwo trójkątów. 3) Wyznacz z niego „zbędną" zmienną. 4) Wstaw do wzoru na pole lub objętość i uprość do postaci z polecenia. 5) Zakończ: „To należało wykazać." Drabinka za 2 pkt: 1 – związek między zmiennymi, 2 – pełne przekształcenie; za 3 pkt (2026): 1 – związek, 2 – układ zależności wystarczający do wyznaczenia wielkości, 3 – pełne rozumowanie. Rozumowanie na konkretnej liczbie – 0 pkt. Nawet bez x.1 rozwiązuj x.2 – wzór jest w nim podany ponownie.

Optymalizacja (x.2) – krok	Punkt CKE	Na co uważać
dziedzina z kontekstu, np. $x \in (0, 15)$	–	bez niej uzasadnienie bywa „na złej dziedzinie" – maks. 3 pkt
pochodna (wzór na pochodną ilorazu, iloczynu, funkcji złożonej)	1 pkt	iloraz pochodnych zamiast pochodnej ilorazu – 0 pkt
miejsce zerowe pochodnej **w dziedzinie**	2 pkt	odrzuć zera spoza dziedziny z zapisem „ $\notin$ "
znak pochodnej i monotoniczność → „wartość najmniejsza/największa"	3 pkt	bez uzasadnienia – maks. 2 pkt, niepełne – maks. 3
wartość funkcji (i wymiary), o które pyta polecenie	4 pkt	odpowiedz na wszystkie pytania z polecenia

- **Co CKE uznaje za uzasadnienie ekstremum:** znak pochodnej w dziedzinie i opis monotoniczności (słowami albo strzałkami, np. szkic znaku pochodnej z „+" i „−"); zapis „w x_0 funkcja ma minimum lokalne i jest to jej jedyne ekstremum w dziedzinie"; „minimum lokalne jest wartością najmniejszą, bo funkcja maleje w $(0, x_0\rangle$ i rośnie w $\langle x_0, b)$"; od 2025 r. także granice na krańcach dziedziny. Samo $f'(x_0) = 0$ nie wystarcza. Gdy zero pochodnej leży poza dziedziną (2024), ekstremum jest na końcu przedziału – funkcja jest wtedy monotoniczna.

Pochodna: „wykaż wzór" + optymalizacja, styczna, granice, model wykładniczy – trening

Zadania krok po kroku

KARTA 2/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 17 pkt

Zadanie 1. Natężenie światła słonecznego pod powierzchnią jeziora maleje wraz z głębokością zgodnie ze wzorem $I(d) = I_0 \cdot a^d$, gdzie I_0 – natężenie tuż pod powierzchnią, d – głębokość w metrach, a – stała dodatnia. Na głębokości 2 m natężenie jest równe 64% natężenia I_0. Oblicz, na jakiej głębokości natężenie jest równe 40,96% natężenia I_0. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 2. Oblicz granicę $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 3. Oblicz granicę $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{3x - 5}{x^2 - 1}$. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 4. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$ w punkcie o pierwszej współrzędnej 2. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Pochodna: „wykaż wzór" + optymalizacja, styczna, granice, model wykładniczy – zadania na poziomie matury

KARTA 3/6

Polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE 2025–2026

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 23 pkt

Zadanie 1. Liczbę L samochodów elektrycznych zarejestrowanych w pewnym mieście opisuje zależność $L(t) = L_0 \cdot k^t$. W tym wzorze t – liczba lat, które upłynęły od początku 2022 r., L_0 – liczba takich samochodów na początku 2022 r., k – stała dodatnia. Na początku 2022 r. zarejestrowanych było 2000 takich samochodów, a na początku 2024 r. – 2880. Oblicz, o ile procent rocznie rośnie liczba tych samochodów. Oblicz, na początku którego roku liczba tych samochodów po raz pierwszy przekroczy 5000. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 2. Oblicz granicę $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 27}{x^2 + x - 6}$. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 3. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x + 1}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq -1$. Punkt P o pierwszej współrzędnej 1 należy do wykresu funkcji f. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Test: Pochodna: „wykaż wzór" + optymalizacja, styczna, granice, model wykładniczy – grupa A

60 minut · 16 pkt

KARTA 5/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 16 pkt

Zadanie 1. Liczbę N wyświetleń krótkiego filmu w pierwszych dniach po publikacji opisuje zależność $N(t) = 5000 \cdot k^t$, gdzie t – liczba pełnych dób od publikacji, k – stała dodatnia. Po dwóch dobach film miał 11 250 wyświetleń. Oblicz, o ile procent na dobę rośnie liczba wyświetleń. Oblicz, po ilu pełnych dobach liczba wyświetleń po raz pierwszy przekroczy 50 000. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 2. Oblicz granicę $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 3. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 1}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o pierwszej współrzędnej 1. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Test: Pochodna: „wykaż wzór" + optymalizacja, styczna, granice, model wykładniczy – grupa B

60 minut · 16 pkt

KARTA 6/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 16 pkt

Zadanie 1. Powierzchnię P stawu (w m²) pokrytą rzęsą wodną opisuje zależność $P(t) = 50 \cdot k^t$, gdzie t – liczba pełnych tygodni od początku obserwacji, k – stała dodatnia. Po dwóch tygodniach rzęsa pokrywała 84,5 m². Oblicz, o ile procent na tydzień rośnie powierzchnia pokryta rzęsą. Oblicz, po ilu pełnych tygodniach rzęsa po raz pierwszy pokryje więcej niż 200 m². Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 2. Oblicz granicę $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2}$. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 3. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x + 3}{x^2 + 3}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o pierwszej współrzędnej 1. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Matura 2027 z matematyki (poziom rozszerzony) – najczęstsze zadania: Pochodna: „wykaż wzór” + optymalizacja, styczna, granice, model wykładniczy…

Podgląd pokazał 7 z 34 stron. Pełna wersja: 34 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Pochodna: „wykaż wzór” + optymalizacja, styczna, granice, model wykładniczy – jak rozwiązywać i jak oceni to CKE – 4 zadania, 11 pkt
- Karta 2: Pochodna: „wykaż wzór” + optymalizacja, styczna, granice, model wykładniczy – trening – 7 zadań, 17 pkt
- Karta 3: Pochodna: „wykaż wzór” + optymalizacja, styczna, granice, model wykładniczy – zadania na poziomie matury – 6 zadań, 23 pkt
- Karta 4: Pochodna: „wykaż wzór” + optymalizacja, styczna, granice, model wykładniczy – zadania trudniejsze – 5 zadań, 18 pkt
- Karta 5: Test: Pochodna: „wykaż wzór” + optymalizacja, styczna, granice, model wykładniczy – grupa A – 5 zadań, 16 pkt
- Karta 6: Test: Pochodna: „wykaż wzór” + optymalizacja, styczna, granice, model wykładniczy – grupa B – 5 zadań, 16 pkt Karta 1 pokazuje, jak CKE ocenia ten typ zadań (kamienie milo

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matura-2027-matematyka-rozszerzona-najczestsze-zadania-j-pochodna-wykaz-wzor-o