Pierwsza Ławka · zestaw działowy · liceum i technikum

Dział 14

# Metody numeryczne: połowienie (miejsca zerowe), pierwiastek kwadratowy

Wyznaczanie miejsc zerowych funkcji metodą połowienia, liczba kroków a dokładność, przybliżony pierwiastek kwadratowy (połowienie, metoda Herona, pierwiastek całkowity), błędy przybliżeń – na papierze i w Pythonie. Osiem kart: teoria z przykładami, ćwiczenia, utrwalenie w formule CKE, zadanie przy komputerze z plikami danych (ZIP), kartkówka i sprawdzian w grupach A i B – z kluczem i zasadami oceniania.

Informatyka | klasa 3 LO i technikum | Dział 14 | zakres rozszerzony (ZR)

| | Karta | Rodzaj | Poziom | Zadania |
|---|---|---|---|---|
| 1 | **Metody numeryczne: połowienie (miejsca zerowe), pierwiastek kwadratowy – najważniejsze wiadomości**<br>Teoria, przykłady krok po kroku, rozgrzewka | Najważniejsze wiadomości | ZR | 4 zad. · 7 pkt |
| 2 | **Metody numeryczne: połowienie (miejsca zerowe), pierwiastek kwadratowy – ćwiczenia podstawowe**<br>Ćwiczę umiejętności z działu | Ćwiczenia | ZR | 6 zad. · 16 pkt |
| 3 | **Metody numeryczne: połowienie (miejsca zerowe), pierwiastek kwadratowy – utrwalenie**<br>Zadania w formule CKE: polecenia i punktacja jak w arkuszach maturalnych | Zadania typu maturalnego | ZR | 6 zad. · 11 pkt |
| 4 | **Metody numeryczne: połowienie (miejsca zerowe), pierwiastek kwadratowy – w praktyce, przy komputerze**<br>Pliki danych w archiwum ZIP · wyniki w plikach wynikiN.txt | Ćwiczenia | ZR | 2 zad. · 13 pkt |
| 5 | **Kartkówka: połowienie i pierwiastek – grupa A**<br>15 minut · 7 pkt · bez komputera | Kartkówka | ZR | 4 zad. · 7 pkt<br>15 min |
| 6 | **Kartkówka: połowienie i pierwiastek – grupa B**<br>15 minut · 7 pkt · bez komputera | Kartkówka | ZR | 4 zad. · 7 pkt<br>15 min |
| 7 | **Sprawdzian: Metody numeryczne: połowienie (miejsca zerowe), pierwiastek kwadratowy – grupa A**<br>45 minut · 20 pkt · bez komputera | Sprawdzian | ZR | 8 zad. · 20 pkt<br>45 min |
| 8 | **Sprawdzian: Metody numeryczne: połowienie (miejsca zerowe), pierwiastek kwadratowy – grupa B**<br>45 minut · 20 pkt · bez komputera | Sprawdzian | ZR | 8 zad. · 20 pkt<br>45 min |

## Jak korzystać z zestawu

- Karta 1 przypomina najważniejsze wiadomości i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku (z kodem w Pythonie albo opisem kroków w aplikacji) – od niej warto zacząć.
- Karta 2 to ćwiczenia podstawowe, karta 3 – utrwalenie w formule zadań maturalnych CKE (ramka „Jak to sprawdza CKE").
- Karta 4 to praca przy komputerze: pliki danych są w archiwum ZIP dołączonym do zestawu, a odpowiedzi kontrolne dla plików *_przyklad (pliki o nazwie z dopiskiem „_przyklad") podano przy zadaniach. Wyniki zapisuje się w plikach wynikiN.txt – jak na maturze.
- Karty 5–6 to kartkówka (15 minut), karty 7–8 – sprawdzian (45 minut), obie w grupach A i B: te same typy zadań i ta sama punktacja, inne dane. Kartkówka i sprawdzian nie wymagają komputera.
- Klucz zawiera odpowiedzi, przykładowe programy, zasady oceniania w stylu CKE i numery wymagań podstawy. Osobny plik „Powtórka" zbiera teorię, typowe błędy i test „Sprawdź się".

## Oznaczenia

| | |
|---|---|
| ZP | zakres podstawowy |
| ZR | zakres rozszerzony (treści tylko dla ZR) |
| **(0–2 pkt)** | liczba punktów możliwych do zdobycia za zadanie |
| **Zadanie 4.1.** | wiązka zadań do wspólnego materiału źródłowego |
| **Jak to sprawdza CKE** | typ zadania i typowy błąd ze sprawozdań CKE |
| **Na maturze** | wymagania z podstawy programowej, których dotyczy temat |

## Wymagania z podstawy programowej (Dz.U. 2024 poz. 1019)

- **I+II.R1f** zapisuje za pomocą listy kroków lub pseudokodu i implementuje w wybranym języku programowania algorytmy poznane na wcześniejszych etapach oraz algorytmy: f) wyznaczania miejsc zerowych funkcji metodą połowienia,
- **I+II.R1g** zapisuje za pomocą listy kroków lub pseudokodu i implementuje w wybranym języku programowania algorytmy poznane na wcześniejszych etapach oraz algorytmy: g) obliczania przybliżonej wartości pierwiastka kwadratowego,
- **I+II.R3a** objaśnia oraz porównuje podstawowe metody i techniki algorytmiczne oraz struktury danych, wykorzystując przykłady problemów i algorytmów, w szczególności: a) wyszukiwanie elementów liniowe i przez połowienie (do znajdowania elementów w zbiorze, sortowania przez wstawianie, przybliżonego rozwiązywania równań),
- **I.R1** wyróżnia w problemie podproblemy i charakteryzuje: metodę połowienia, stosuje podejście zachłanne i rekurencję;
- **I.R9** wyjaśnia, jakie może być źródło błędów pojawiających się w obliczeniach komputerowych: błąd zaokrąglenia, błąd przybliżenia;

Materiał oryginalny – żadne zadanie nie jest kopią zadania CKE ani podręcznika; dane w plikach są fikcyjne. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: I+II.R1f, I+II.R1g, I+II.R3a, I.R1, I.R9. Miejsce w programach nauczania: „Informatyka na czasie" (Nowa Era) ZR – algorytmika, klasa 3 (nazwy serii podano tylko informacyjnie). Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

PIERWSZA ŁAWKA

# Metody numeryczne: połowienie (miejsca zerowe), pierwiastek kwadratowy – najważniejsze wiadomości

Teoria, przykłady krok po kroku, rozgrzewka

ZR </> KARTA 1/8

Imię i nazwisko: ..... Klasa: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 7 pkt

Najważniejsze wiadomości · 7 pkt

## Przypomnij sobie

- **Miejsce zerowe** funkcji f to liczba $x_0$, dla której $f(x_0) = 0$. Wiele równań (np. $x^3 + 2x - 7 = 0$) nie ma prostego wzoru na rozwiązanie – liczymy je w przybliżeniu **metodami numerycznymi**.
- **Warunek startu metody połowienia** (bisekcji): f jest ciągła na [a, b] i f(a), f(b) mają **różne znaki** ($f(a) \cdot f(b) < 0$). Wtedy w przedziale (a, b) jest co najmniej jedno miejsce zerowe.
- **Krok połowienia**: $c = (a + b)/2$. Jeśli $f(c) = 0$ – koniec. Jeśli f(a) i f(c) mają różne znaki, nowy przedział to [a, c], w przeciwnym razie [c, b]. Powtarzamy, aż długość przedziału będzie nie większa od żądanej dokładności ε.
- **Liczba kroków**: po k krokach przedział ma długość $(b - a)/2^k$. Wystarczy najmniejsze k, dla którego $(b - a)/2^k \le \varepsilon$, czyli $k \ge \log_2((b - a)/\varepsilon)$. Np. [0, 4] i $\varepsilon = 0{,}001 \rightarrow 2^k \ge 4000 \rightarrow k = 12$.
- **Kiedy połowienie zawodzi**: gdy f nie zmienia znaku (np. $f(x) = (x - 1)^2$ ma miejsce zerowe 1, ale nigdzie nie jest ujemna), gdy w przedziale jest kilka miejsc zerowych (metoda znajdzie tylko jedno) albo gdy f nie jest ciągła.
- **Pierwiastek kwadratowy przez połowienie**: $\sqrt{a}$ ($a \ge 1$) to miejsce zerowe $f(x) = x^2 - a$ w przedziale [0, a]. Dla liczb całkowitych: szukamy największego x, dla którego $x \cdot x \le n$ – bez liczb rzeczywistych i bez błędów zaokrągleń.
- **Metoda Herona** (babilońska, przypadek metody Newtona): $x_{k+1} = (x_k + a / x_k)/2$. Jeśli $x_k > \sqrt{a}$, to $a / x_k < \sqrt{a}$, a średnia leży bliżej $\sqrt{a}$. Już pierwsze obliczone przybliżenie $x_1$ (dla dowolnego $x_0 > 0$) jest nie mniejsze od $\sqrt{a}$, a kolejne maleją do $\sqrt{a}$; liczba poprawnych cyfr mniej więcej się podwaja w każdym kroku.
- **Warunek stopu i błędy**: liczby rzeczywiste w komputerze są przybliżone (błąd zaokrąglenia), więc nie porównujemy ich przez ==, tylko sprawdzamy $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ albo długość przedziału $\le \varepsilon$. Wynik metody to przybliżenie (błąd przybliżenia), nie wartość dokładna.
- **Porównanie**: połowienie jest pewne i proste (zawsze zbiega, gdy jest zmiana znaku), ale wolne – jeden bit dokładności na krok. Heron dla $\sqrt{a}$ jest bardzo szybki (kilka kroków), ale dotyczy tylko pierwiastka.

## Przykłady z rozwiązaniem

**Przykład 1.** **Wykonaj trzy kroki metody połowienia dla $f(x) = x^3 + 2x - 7$ w przedziale [1, 2].**

$f(1) = -4 < 0$, $f(2) = 5 > 0$ – jest zmiana znaku.

| krok | a | b | c | znak f(c) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1,5 | − |
| 2 | 1,5 | 2 | 1,75 | + |
| 3 | 1,5 | 1,75 | 1,625 | + |

$f(1{,}5) = -0{,}625$ – zostaje [1,5; 2]; $f(1{,}75) = 1{,}859375$ – zostaje [1,5; 1,75]; $f(1{,}625) = 0{,}541016$ – zostaje [1,5; 1,625]. Miejsce zerowe ≈ 1,57 (leży w [1,5; 1,625]).

```
def f(x):
    return x**3 + 2*x - 7

def polowienie(a, b, eps):      # f(a) i f(b) mają różne znaki
    while b - a > eps:
        c = (a + b) / 2
        if f(a) * f(c) <= 0:    # zmiana znaku w [a, c]
            b = c
        else:                   # zmiana znaku w [c, b]
            a = c
    return (a + b) / 2
```

**Przykład 2.** **Ile kroków połowienia potrzeba, żeby przedział [0, 4] zawęzić do długości nie większej niż 0,001?**

Po k krokach długość to $4/2^k$. Warunek $4/2^k \le 0{,}001 \Leftrightarrow 2^k \ge 4000$. $2^{11} = 2048$ – za mało, $2^{12} = 4096$ – wystarczy. Odpowiedź: 12 kroków.

**Przykład 3.** **Oblicz metodą Herona trzy przybliżenia $\sqrt{7}$, zaczynając od $x_0 = 3$ (6 miejsc po przecinku).**

$x_1 = (3 + 7/3)/2 = 2{,}666667$; $x_2 = (x_1 + 7/x_1)/2 = 2{,}645833$; $x_3 = 2{,}645751$ ($\sqrt{7} = 2{,}645751$). Już trzecie przybliżenie ma 6 poprawnych cyfr po przecinku.

```
def pierwiastek(a, eps):        # a > 0
    x = a                       # przybliżenie początkowe (od góry, gdy a ≥ 1)
    while True:
        y = (x + a / x) / 2
        if abs(x - y) < eps:
            return y
        x = y
```

**Przykład 4.** **Oblicz całkowitą część √1000 metodą połowienia na liczbach całkowitych. Ile obrotów wykona pętla?**

```
def isqrt(n):                  # największe x, dla którego x * x <= n
    lo, hi = 0, n + 1          # lo * lo <= n < hi * hi
    while hi - lo > 1:
        s = (lo + hi) // 2
        if s * s <= n:
            lo = s
        else:
            hi = s
    return lo
```

lo = 0, hi = 1001. s = 500 → hi = 500; s = 250 → hi = 250; s = 125 → hi = 125; s = 62 → hi = 62; s = 31 → lo = 31; s = 46 → hi = 46; s = 38 → hi = 38; s = 34 → hi = 34; s = 32 → hi = 32. Koniec: hi − lo = 1, wynik lo = 31, obrotów pętli: 9.

## Zadania

### Zadanie 1. (0–3 pkt) ..... / 3

Metoda połowienia dla $f(x) = x^2 - 5$ w przedziale [2, 3]. Uzupełnij.

1. środek c = _____ 2. f(c) = _____ 3. nowy przedział: _____

### Zadanie 2. (0–1 pkt) ..... / 1

Równanie $x^3 - x - 3 = 0$ ma rozwiązanie na pewno w przedziale

A. [0, 1] B. [1, 2] C. [−1, 0] D. [2, 3]

### Zadanie 3. (0–2 pkt) ..... / 2

Oceń prawdziwość zdań.

| | | |
|---|---|---|
| 1. Po każdym kroku metody połowienia długość przedziału maleje dwa razy. | P | F |
| 2. Warunek startu metody połowienia jest spełniony dla funkcji $f(x) = x^2$ w przedziale [−1, 2]. | P | F |

### Zadanie 4. (0–1 pkt) ..... / 1

Jeden krok metody Herona dla √13 z $x_0 = 4$. Uzupełnij.

1. $x_1$ = _____

# Metody numeryczne: połowienie (miejsca zerowe), pierwiastek kwadratowy – ćwiczenia podstawowe

ZR </> KARTA 2/8

Ćwiczę umiejętności z działu

Imię i nazwisko: ..... Klasa: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 16 pkt

Ćwiczenia · 16 pkt

## Zadanie 1. (0–3 pkt) ..... / 3

Wykonaj trzy kroki metody połowienia dla $f(x) = x^2 - 3$ w przedziale $[1, 2]$. Uzupełnij tabelę i podaj przedział po trzecim kroku.

| krok | a | b | c | znak f(c) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |

Miejsce na odpowiedź

## Zadanie 2. (0–3 pkt) ..... / 3

Podaj najmniejszą liczbę kroków połowienia, po której przedział ma długość nie większą niż ε.

1. $[0, 1]$, $\varepsilon = 0{,}01$: _____
2. $[0, 10]$, $\varepsilon = 0{,}001$: _____
3. $[1, 3]$, $\varepsilon = 0{,}000001$: _____

## Zadanie 3. (0–3 pkt) ..... / 3

Oblicz metodą Herona trzy przybliżenia $\sqrt{20}$, zaczynając od $x_0 = 5$. Wyniki zaokrąglij do 4 miejsc po przecinku. Możesz korzystać z kalkulatora prostego.

| k | $x_k$ |
|---|---|
| 0 | 5 |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |

**Zadanie 4.** (0–3 pkt) ..... / 3

Uzupełnij luki w funkcji polowienie(a, b, eps) (funkcja f jest zdefiniowana wcześniej, f(a) i f(b) mają różne znaki).

```
def polowienie(a, b, eps):
    while  luka 1 :
        c = (a + b) / 2
        if f(a) * f(c) <= 0:
            luka 2
        else:
            luka 3
    return (a + b) / 2
```

1. luka 1: _____
2. luka 2: _____
3. luka 3: _____

**Zadanie 5.** (0–2 pkt) ..... / 2

Funkcja $f(x) = (x - 1)^2$ ma miejsce zerowe $x = 1$. Wyjaśnij, dlaczego metodą połowienia nie znajdziemy go, zaczynając od przedziału [0, 3]. Jak inaczej znaleźć to miejsce zerowe?

Miejsce na odpowiedź

**Zadanie 6.** (0–2 pkt) ..... / 2

Wykonaj funkcję isqrt(n) z karty 1 dla n = 200. Zapisz kolejne wartości s, lo, hi. Podaj wynik i liczbę obrotów pętli.

Miejsce na odpowiedź

# Metody numeryczne: połowienie (miejsca zerowe), pierwiastek kwadratowy – w praktyce, przy komputerze

Pliki danych w archiwum ZIP · wyniki w plikach wynikiN.txt

ZR </> KARTA 4/8

Imię i nazwisko: ..... Klasa: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 13 pkt

Ćwiczenia · 13 pkt

## Zadanie 1. (0–7 pkt)

Równania trzeciego stopnia

**Opis danych**

Plik **rownania.txt** zawiera 200 wierszy. W każdym są dwie liczby całkowite p i q ($1 \le p \le 20$, $-500 \le q \le 500$) oddzielone spacją – współczynniki równania $x^3 + p \cdot x + q = 0$. Dla $p > 0$ funkcja $f(x) = x^3 + px + q$ jest rosnąca, więc każde równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie i leży ono w przedziale $[-10, 10]$ ($f(-10) < 0 < f(10)$). Pierwsze wiersze pliku:

```
18 -342
18 -156
2 -275
```

Plik **rownania_przyklad.txt** zawiera 10 wierszy. Rozwiązania wyznacz metodą połowienia; nie korzystaj z bibliotek do rozwiązywania równań.

Do dyspozycji masz plik **rownania.txt** oraz mniejszy plik **rownania_przyklad.txt**. Odpowiedzi dla danych przykładowych podano przy zadaniach – najpierw sprawdź na nich swój program.

Napisz program (lub kilka programów), który(-e) znajdzie(-ą) i da(dzą) odpowiedzi do podanych zadań. Odpowiedzi zapisz w pliku **wyniki1.txt**, a każdą z nich poprzedź numerem odpowiedniego zadania.

Do oceny oddajesz: plik tekstowy **wyniki1.txt** z odpowiedziami do zadań 1.1–1.3 (każda poprzedzona numerem zadania) oraz pliki z kodem źródłowym programów, np. **zadanie1.py**.

*Dane fikcyjne, przygotowane do zadania.*

### Zadanie 1.1. (0–2 pkt) ..... / 2

Podaj, ile równań ma rozwiązanie w przedziale (1, 2). *Dla danych z pliku przykładowego odpowiedź: 1.*

Odpowiedź zapisz w pliku wyniki1.txt

### Zadanie 1.2. (0–2 pkt) ..... / 2

Podaj współczynniki p i q równania o największym rozwiązaniu oraz to rozwiązanie zaokrąglone do 3 miejsc po przecinku (trzy wartości oddzielone spacjami). *Dla danych z pliku przykładowego odpowiedź: 11 -356 6.571.*

Odpowiedź zapisz w pliku wyniki1.txt

### Zadanie 1.3. (0–3 pkt) ..... / 3

Podaj sumę rozwiązań wszystkich równań z pliku zaokrągloną do 2 miejsc po przecinku. *Dla danych z pliku przykładowego odpowiedź: 6.42.*

Odpowiedź zapisz w pliku wyniki1.txt

**Zadanie 7.** (0–3 pkt) ..... / 3

Wykonaj funkcję isqrt(n) (połowienie na liczbach całkowitych, lo = 0, hi = n + 1, dopóki hi − lo > 1) dla n = 500. Podaj kolejne wartości s, wynik i liczbę obrotów pętli.

```
def isqrt(n):                  # największe x, dla którego x * x <= n
    lo, hi = 0, n + 1            # lo * lo <= n < hi * hi
    while hi - lo > 1:
        s = (lo + hi) // 2
        if s * s <= n:
            lo = s
        else:
            hi = s
    return lo
```

Miejsce na odpowiedź

**Zadanie 8.** (0–2 pkt) ..... / 2

Porównaj funkcję isqrt(n) (połowienie na liczbach całkowitych) i metodę Herona na liczbach rzeczywistych przy sprawdzaniu, czy n jest kwadratem liczby całkowitej. Która metoda daje wynik dokładny i dlaczego?

Miejsce na odpowiedź

PIERWSZA ŁAWKA

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

# Metody numeryczne: połowienie (miejsca zerowe), pierwiastek kwadratowy – kartkówka, sprawdzian i karty pracy z powtórką, informatyka, klasa 3 LO i...

Podgląd pokazał 9 z 29 stron. Pełna wersja: 29 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Metody numeryczne: połowienie (miejsca zerowe), pierwiastek kwadratowy – najważniejsze wiadomości – 4 zadania, 7 pkt
- Karta 2: Metody numeryczne: połowienie (miejsca zerowe), pierwiastek kwadratowy – ćwiczenia podstawowe – 6 zadań, 16 pkt
- Karta 3: Metody numeryczne: połowienie (miejsca zerowe), pierwiastek kwadratowy – utrwalenie – 6 zadań, 11 pkt
- Karta 4: Metody numeryczne: połowienie (miejsca zerowe), pierwiastek kwadratowy – w praktyce, przy komputerze – 2 zadania, 13 pkt
- Karta 5: Kartkówka: połowienie i pierwiastek – grupa A – 4 zadania, 7 pkt
- Karta 6: Kartkówka: połowienie i pierwiastek – grupa B – 4 zadania, 7 pkt
- Karta 7: Sprawdzian: Metody numeryczne: połowienie (miejsca zerowe), pierwiastek kwadratowy – grupa A – 8 zadań, 20 pkt
- Karta 8: Sprawdzian: Metody numeryczne: połowienie (miejsca zerowe), pierwiastek kwadratowy – grupa B – 8 zadań, 20 pkt Karta 1 przypomina teorię i pokazuje przykłady rozwiązane kr

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/informatyka-liceum-klasa-3-zr-dzial-14-metody-numeryczne-polowienie-miejsca-zerowe