PIERWSZA ŁAWKA · ZESTAW DZIAŁOWY · MATEMATYKA · KLASA 1 LO I TECHNIKUM · ZAKRES PODSTAWOWY

Dział 6. Funkcje i ich własności

Pojęcie funkcji i sposoby jej opisu (także różnymi wzorami na przedziałach), wartość funkcji, odczytywanie z wykresu dziedziny, zbioru wartości, miejsc zerowych, monotoniczności i wartości ekstremalnych w przedziale domkniętym, przesunięcia wykresu wzdłuż osi, proporcjonalność odwrotna i funkcja a/x w zastosowaniach. Dziewięć kart: teoria z przykładami, ćwiczenia, zadania typu maturalnego, dwie kartkówki (A i B) i sprawdzian (A i B) – z kluczem i zasadami oceniania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Funkcje i ich własności – najważniejsze wiadomości** Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka	4 zad. 8 pkt
2	**Funkcje i ich własności – ćwiczenia** Ćwiczę umiejętności z działu	8 zad. 23 pkt
3	**Funkcje i ich własności – zadania typu maturalnego** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	8 zad. 13 pkt
4	**Kartkówka 1: odczytywanie własności funkcji z wykresu – grupa A** 15 minut · 7 pkt	3 zad. 7 pkt
5	**Kartkówka 1: odczytywanie własności funkcji z wykresu – grupa B** 15 minut · 7 pkt	3 zad. 7 pkt
6	**Kartkówka 2: przesunięcia wykresu i proporcjonalność odwrotna – grupa A** 15 minut · 7 pkt	4 zad. 7 pkt
7	**Kartkówka 2: przesunięcia wykresu i proporcjonalność odwrotna – grupa B** 15 minut · 7 pkt	4 zad. 7 pkt
8	**Sprawdzian: Funkcje i ich własności – grupa A** 45 minut · 20 pkt	10 zad. 20 pkt
9	**Sprawdzian: Funkcje i ich własności – grupa B** 45 minut · 20 pkt	10 zad. 20 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 przypomina najważniejsze wiadomości z działu i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku – od niej warto zacząć.
- Karta 2 to ćwiczenia, a karta 3 – zadania w formule matury 2027 (polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE).
- Karty 4–7 to dwie kartkówki (po 15 minut), każda w grupach A i B. Karty 8–9 to sprawdzian (45 minut) w grupach A i B – te same typy zadań i ta sama punktacja, inne liczby.
- Klucz na końcu zestawu zawiera odpowiedzi, przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE (kamienie milowe, błąd rachunkowy = −1 pkt).
- Osobny plik „Powtórka” zbiera definicje, wzory (z zaznaczeniem, które są w karcie wzorów CKE), typowe błędy i test „Sprawdź się”.

Materiał oryginalny. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: V.1–V.4, V.12, V.13; cele ogólne II.1, III.1. Miejsce w seriach podręczników: NE kl. 1 · Pazdro kl. 1 (przesunięcia wykresów: kl. 2) · GWO kl. 1–2. Nazwy wydawnictw i serii podano tylko informacyjnie – materiał nie jest z nimi powiązany. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

Funkcje i ich własności – najważniejsze wiadomości

Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka

KARTA 1/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Funkcja** f określona w zbiorze X przyporządkowuje *każdemu* elementowi $x \in X$ *dokładnie jedną* wartość $f(x)$. Funkcję można opisać słownie, tabelą, wykresem albo wzorem – także różnymi wzorami na różnych przedziałach, np. $f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ dla } x < 2 \\ 5 - x \text{ dla } x \geq 2 \end{cases}$.
- **Dziedzina** D_f – zbiór argumentów; **zbiór wartości** – zbiór wszystkich wartości $f(x)$.

  Miejsce zerowe – argument, dla którego wartość funkcji jest równa 0 (tam wykres przecina oś Ox lub jej dotyka). Punkt (a, b) należy do wykresu f wtedy i tylko wtedy, gdy $f(a) = b$.
- **Monotoniczność:** f jest **rosnąca** w przedziale, gdy większym argumentom odpowiadają większe wartości, **malejąca** – gdy mniejsze, **stała** – gdy wartości są równe. Wykres czytamy „od lewej do prawej", a przedziały monotoniczności podajemy **na osi *Ox*** (to zbiory argumentów).
- **Wartość największa i najmniejsza w przedziale domkniętym** to druga współrzędna najwyżej i najniżej położonego punktu wykresu nad tym przedziałem. Odróżniaj ją od *argumentu*, dla którego jest przyjmowana. Nierówność $f(x) > a$ spełniają argumenty, dla których wykres leży *powyżej* prostej $y = a$ (przy nierówności nieostrej dołączamy punkty wspólne z tą prostą).
- **Przesunięcia wykresu** (wykresy $y = -f(x)$ i $y = f(-x)$ są tylko w zakresie rozszerzonym):

wzór	wykres $y = f(x)$ przesuwamy	co się zmienia
$y = f(x - a)$	o a jednostek wzdłuż osi Ox: w prawo, gdy $a > 0$; w lewo, gdy $a < 0$	dziedzina i miejsca zerowe przesuwają się o a; zbiór wartości bez zmian
$y = f(x) + b$	o b jednostek wzdłuż osi Oy: w górę, gdy $b > 0$; w dół, gdy $b < 0$	zbiór wartości przesuwa się o b; dziedzina bez zmian

- Uwaga na znak: $y = f(x + 3)$ to $y = f(x - (-3))$ – przesunięcie o 3 jednostki **w lewo**.
- **Proporcjonalność odwrotna:** $y = \frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$ i $x \neq 0$. Iloczyn $x \cdot y = a$ jest stały – ile razy zwiększymy x, tyle razy zmniejszy się y. Wykres to **hiperbola**: dla $a > 0$ w I i III ćwiartce, dla $a < 0$ w II i IV ćwiartce; nie ma punktów wspólnych z osiami układu.
- Dla $a > 0$ funkcja $y = \frac{a}{x}$ jest malejąca w przedziale $(-\infty, 0)$ i w przedziale $(0, +\infty)$, ale **nie** jest malejąca w całej dziedzinie. Dla $a < 0$ jest rosnąca w każdym z tych przedziałów. Własności funkcji i wzoru $y = \frac{a}{x}$ nie ma w „Wybranych wzorach matematycznych".

Podgląd • Pierwsza Ławka

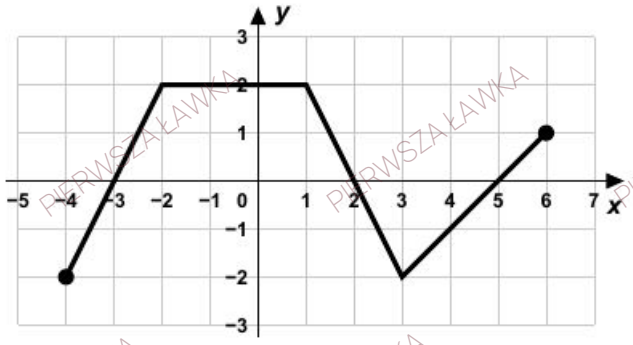
PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \begin{cases} 2x - 2 \text{ dla } x < 0 \\ x^2 - 4 \text{ dla } x \geq 0 \end{cases}$. Oblicz $f(-3)$ i $f(3)$ oraz wyznacz miejsca zerowe funkcji f.

$-3 < 0$, więc $f(-3) = 2 \cdot (-3) - 2 = -8$; $3 \geq 0$, więc $f(3) = 9 - 4 = 5$.

Miejsca zerowe. Dla $x < 0$: $2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, ale $1 \notin (-\infty, 0)$ – odrzucamy. Dla $x \geq 0$: $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ lub $x = -2$; $-2 \notin \langle 0, +\infty)$ – odrzucamy. Funkcja ma jedno miejsce zerowe: $x = 2$.

Przykład 2. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f. Odczytaj dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, najmniejszą wartość w przedziale $\langle 0, 6 \rangle$ oraz zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie.



$D_f = \langle -4, 6 \rangle$ (oba końce wykresu są zamalowane). Zbiór wartości: $\langle -2, 2 \rangle$. Miejsca zerowe: -3, 2, 5.

f jest rosnąca w $\langle -4, -2 \rangle$ i w $\langle 3, 6 \rangle$, stała w $\langle -2, 1 \rangle$, malejąca w $\langle 1, 3 \rangle$.

W przedziale $\langle 0, 6 \rangle$ najmniejsza wartość to -2 – funkcja przyjmuje ją dla argumentu $x = 3$.

Wartości dodatnie: $x \in (-3, 2) \cup (5, 6\rangle$ (w miejscach zerowych wartość jest równa 0, więc je pomijamy).

Przykład 3. Funkcja f ma dziedzinę $\langle -3, 4 \rangle$, zbiór wartości $\langle -1, 5 \rangle$ i jedno miejsce zerowe $x = 1$. Podaj dziedzinę, zbiór wartości i miejsce zerowe funkcji $g(x) = f(x + 3)$ oraz dziedzinę i zbiór wartości funkcji $h(x) = f(x) - 2$.

g: wykres f przesuwamy o 3 jednostki w lewo. $D_g = \langle -6, 1 \rangle$, zbiór wartości $\langle -1, 5 \rangle$, miejsce zerowe $1 - 3 = -2$ (sprawdzenie: $g(-2) = f(1) = 0$).

h: wykres f przesuwamy o 2 jednostki w dół. $D_h = \langle -3, 4 \rangle$, zbiór wartości $\langle -3, 3 \rangle$. Miejsc zerowych funkcji h nie da się podać z tych danych – są to argumenty, dla których $f(x) = 2$.

Przykład 4. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ przechodzi przez punkt $P = (-3, 4)$. Wyznacz a i oblicz $f(6)$. Następnie rozwiąż zadanie: sześciu jednakowo wydajnych pracowników wykonuje pewną pracę w 10 dni. W ciągu ilu dni wykona ją czterech takich pracowników?

$4 = \frac{a}{-3}$, więc $a = -12$ (iloczyn współrzędnych punktu). $f(6) = \frac{-12}{6} = -2$.

Liczba pracowników n i liczba dni d są odwrotnie proporcjonalne: $n \cdot d = 6 \cdot 10 = 60$, czyli $d = \frac{60}{n}$. Dla $n = 4$: $d = 15$ dni.

ZADANIA

Zadanie 1. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Oblicz. ___ / 3 pkt

1. $f(0)$ = _____ 2. $f(2)$ = _____ 3. $f(-1)$ = _____

Zadanie 2. Do wykresu funkcji $f(x) = \frac{4}{x}$ należy punkt ___ / 1 pkt

A. $(-4, 1)$ **B.** $(8, 2)$ **C.** $(2, -2)$ **D.** $(-2, -2)$

Zadanie 3. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 3 pkt

1. Przyporządkowanie, które każdemu uczniowi klasy przyporządkowuje jego datę urodzenia, jest funkcją.	**P**	**F**
2. Przyporządkowanie, które każdej liczbie dodatniej x przyporządkowuje liczbę y taką, że $y^2 = x$, jest funkcją.	**P**	**F**
3. Wykres funkcji $y = f(x) + 3$ powstaje z wykresu funkcji $y = f(x)$ przez przesunięcie o 3 jednostki w górę.	**P**	**F**

Zadanie 4. Wykres funkcji $y = f(x - 4)$ powstaje z wykresu funkcji $y = f(x)$ przez przesunięcie o 4 jednostki ___ / 1 pkt

A. w prawo **B.** w lewo **C.** w górę **D.** w dół

PIERWSZA ŁAWKA

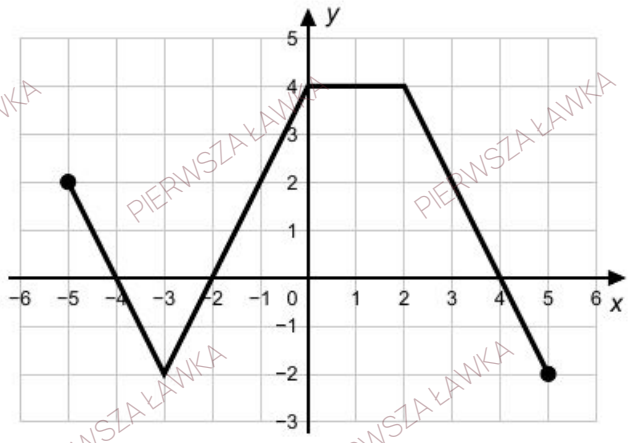
Funkcje i ich własności – ćwiczenia

KARTA 2/9

Ćwiczę umiejętności z działu

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 23 pkt

Zadanie 1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji *f*. Uzupełnij. ___ / 6 pkt



1. Dziedzina funkcji *f*: _____
2. Zbiór wartości funkcji *f*: _____
3. Miejsca zerowe funkcji *f*: _____
4. Przedział, w którym funkcja *f* jest rosnąca: _____
5. Największa wartość funkcji *f* w przedziale ⟨−5, −2⟩: _____
6. Zbiór argumentów, dla których funkcja *f* przyjmuje wartości dodatnie: _____

Zadanie 2. Funkcja *f* jest określona wzorem $f(x) = \begin{cases} -x + 2 \text{ dla } x < 0 \\ 2 \text{ dla } 0 \le x \le 3 \\ x - 1 \text{ dla } x > 3 \end{cases}$ **. Oblicz.** ___ / 4 pkt

1. $f(-3)$ = _____ 2. $f(0)$ = _____ 3. $f(3)$ = _____ 4. $f(5)$ = _____

Zadanie 3. Funkcja *f* jest określona tabelą.

x	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4

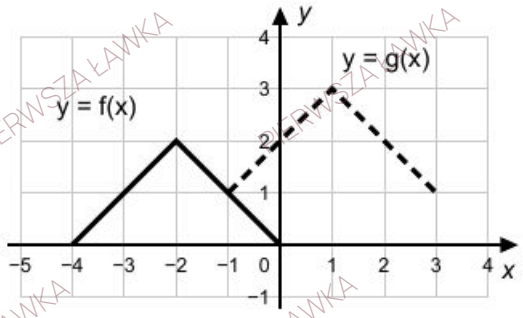
Zbiorem wartości funkcji *f* jest zbiór ___ / 1 pkt

A. {−2, −1, 0, 1, 2} **B.** {0, 1, 4} **C.** ⟨0, 4⟩ **D.** {1, 4}

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 4. Funkcja f ma dziedzinę $\langle -2, 6\rangle$, zbiór wartości $\langle -3, 1\rangle$ i miejsca zerowe -1 oraz 4. a) Podaj dziedzinę, zbiór wartości i miejsca zerowe funkcji $g(x) = f(x - 3)$. b) Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji $h(x) = f(x) + 3$. ___ / 3 pkt

Zadanie 5. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji f (linia ciągła) i g (linia przerywana). Wykres funkcji g powstał z wykresu funkcji f przez przesunięcie. Funkcja g jest określona wzorem ___ / 1 pkt



A. $g(x) = f(x - 3) + 1$ **B.** $g(x) = f(x + 3) + 1$ **C.** $g(x) = f(x + 1) - 3$ **D.** $g(x) = f(x - 3) - 1$

Zadanie 6. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ przechodzi przez punkt $A = (4, -3)$. a) Wyznacz a. b) Oblicz $f(-6)$. c) Sprawdź, czy punkt $B = (2, -6)$ należy do wykresu funkcji f. ___ / 3 pkt

Zadanie 7. Basen napełniają jednakowe pompy. Trzy pompy napełniają go w ciągu 12 godzin. Zapisz wzór funkcji opisującej czas napełniania basenu w zależności od liczby pomp n. Oblicz, ile pomp potrzeba, aby napełnić basen w ciągu 4 godzin. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

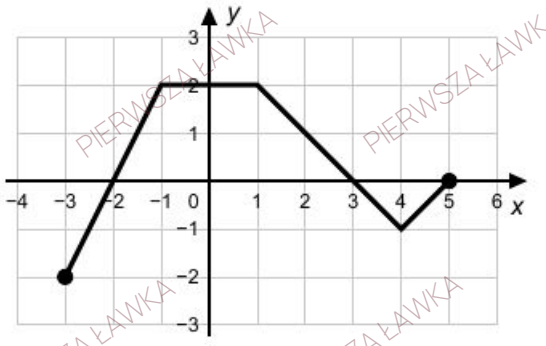
Kartkówka 1: odczytywanie własności funkcji z wykresu – grupa A

15 minut · 7 pkt

KARTA 4/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 7 pkt

Zadanie 1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji *f*. Uzupełnij. ___ / 4 pkt



1. Dziedzina funkcji *f*: _____
2. Zbiór wartości funkcji *f*: _____
3. Miejsca zerowe funkcji *f*: _____
4. Przedział, w którym funkcja *f* jest malejąca: _____

Zadanie 2. Największa wartość funkcji *f* z zadania 1. w przedziale ⟨2, 5⟩ jest równa ___ / 1 pkt

A. 1 **B.** 0 **C.** 5 **D.** 2

Zadanie 3. Na podstawie wykresu z zadania 1. uzupełnij. ___ / 2 pkt

1. Zbiór argumentów, dla których funkcja *f* przyjmuje wartości ujemne: _____
2. Liczba punktów wspólnych wykresu funkcji *f* i prostej $y = -1$: _____

Podgląd • Pierwsza Ławka

Sprawdzian: Funkcje i ich własności – grupa A

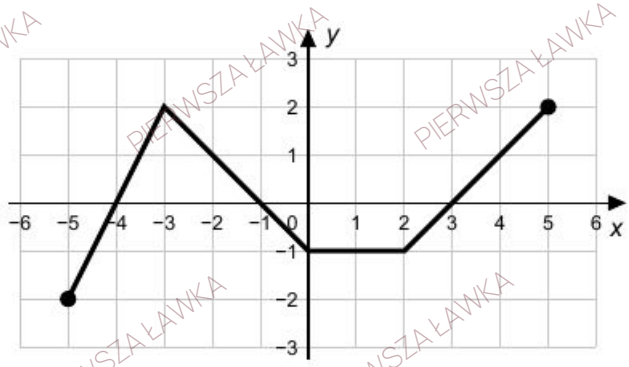
KARTA 8/9

45 minut · 20 pkt

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 20 pkt

Zadanie 1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji *f*.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Zbiorem wartości funkcji *f* jest przedział

___ / 1 pkt



A. ⟨−2, 5⟩ **B.** ⟨−5, 5⟩ **C.** ⟨−2, 2⟩ **D.** ⟨−1, 2⟩

Zadanie 2. Funkcja *f* jest określona wykresem z zadania 1.
Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby i przedziały w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

___ / 3 pkt

1. Miejscami zerowymi funkcji *f* są liczby _____ .
2. Funkcja *f* jest malejąca w przedziale _____ .
3. Funkcja *f* przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów ze zbioru _____ .

Zadanie 3. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Największa wartość funkcji *f* z zadania 1. w przedziale ⟨−2, 5⟩ jest równa

___ / 1 pkt

A. 2 **B.** 1 **C.** 5 **D.** 0

Zadanie 4. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Funkcja *f* jest określona wzorem $f(x) = \begin{cases} 3 - x \text{ dla } x \le 1 \\ 2x + 1 \text{ dla } x > 1 \end{cases}$. Wartość wyrażenia $f(1) + f(4)$ jest równa

___ / 1 pkt

A. 12 **B.** 11 **C.** 2 **D.** 1

Zadanie 5. Funkcja *f* jest określona wykresem z zadania 1.
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

___ / 1 pkt

1. Funkcja $g(x) = f(x) + 3$ ma zbiór wartości ⟨1, 5⟩.	**P**	**F**
2. Funkcja $h(x) = f(x - 1)$ ma miejsce zerowe $x = 2$.	**P**	**F**

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Funkcje i ich własności – kartkówki, sprawdzian i karty pracy z powtórką, matematyka, klasa 1 LO i technikum (zakres podstawowy)

Podgląd pokazał 9 z 28 stron. Pełna wersja: 28 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Funkcje i ich własności – najważniejsze wiadomości – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 2: Funkcje i ich własności – ćwiczenia – 8 zadań, 23 pkt
- Karta 3: Funkcje i ich własności – zadania typu maturalnego – 8 zadań, 13 pkt
- Karta 4: Kartkówka 1: odczytywanie własności funkcji z wykresu – grupa A – 3 zadania, 7 pkt
- Karta 5: Kartkówka 1: odczytywanie własności funkcji z wykresu – grupa B – 3 zadania, 7 pkt
- Karta 6: Kartkówka 2: przesunięcia wykresu i proporcjonalność odwrotna – grupa A – 4 zadania, 7 pkt
- Karta 7: Kartkówka 2: przesunięcia wykresu i proporcjonalność odwrotna – grupa B – 4 zadania, 7 pkt
- Karta 8: Sprawdzian: Funkcje i ich własności – grupa A – 10 zadań, 20 pkt
- Karta 9: Sprawdzian: Funkcje i ich własności – grupa B – 10 zadań, 20 pkt Karta 1 przypomina teorię i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku.

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail
pierwszalawka.pl/material/matematyka-liceum-klasa-1-dzial-06-funkcje-i-ich-wlasnosci