PIERWSZA ŁAWKA · ZESTAW DZIAŁOWY · MATEMATYKA · KLASA 2 LO I TECHNIKUM · ZAKRES PODSTAWOWY

Dział 2. Funkcja kwadratowa w zastosowaniach

Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej z informacji o funkcji i z wykresu, najmniejsza i największa wartość w przedziale domkniętym, zastosowania w kontekście praktycznym i geometrycznym, zadania optymalizacyjne (wzór, dziedzina, wierzchołek) ze schematami CKE. Dziewięć kart: teoria z przykładami, ćwiczenia, zadania typu maturalnego, dwie kartkówki (A i B) i sprawdzian (A i B) – z kluczem i zasadami oceniania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Funkcja kwadratowa w zastosowaniach – najważniejsze wiadomości** Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka	3 zad. 8 pkt
2	**Funkcja kwadratowa w zastosowaniach – ćwiczenia** Ćwiczę umiejętności z działu	8 zad. 23 pkt
3	**Funkcja kwadratowa w zastosowaniach – zadania typu maturalnego** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	8 zad. 15 pkt
4	**Kartkówka 1: wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej – grupa A** 15 minut · 9 pkt	4 zad. 9 pkt
5	**Kartkówka 1: wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej – grupa B** 15 minut · 9 pkt	4 zad. 9 pkt
6	**Kartkówka 2: największa i najmniejsza wartość, optymalizacja – grupa A** 15 minut · 8 pkt	3 zad. 8 pkt
7	**Kartkówka 2: największa i najmniejsza wartość, optymalizacja – grupa B** 15 minut · 8 pkt	3 zad. 8 pkt
8	**Sprawdzian: Funkcja kwadratowa w zastosowaniach – grupa A** 45 minut · 20 pkt	9 zad. 20 pkt
9	**Sprawdzian: Funkcja kwadratowa w zastosowaniach – grupa B** 45 minut · 20 pkt	9 zad. 20 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 przypomina najważniejsze wiadomości z działu i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku – od niej warto zacząć.
- Karta 2 to ćwiczenia, a karta 3 – zadania w formule matury 2027 (polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE).
- Karty 4–7 to dwie kartkówki (po 15 minut), każda w grupach A i B. Karty 8–9 to sprawdzian (45 minut) w grupach A i B – te same typy zadań i ta sama punktacja, inne liczby.
- Klucz na końcu zestawu zawiera odpowiedzi, przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE (kamienie milowe, błąd rachunkowy = −1 pkt).
- Osobny plik „Powtórka” zbiera definicje, wzory (z zaznaczeniem, które są w karcie wzorów CKE), typowe błędy i test „Sprawdź się”.

Materiał oryginalny. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: V.9, V.10, V.11, XIII (w tle V.4, V.8, VIII.8); cele ogólne III.2, IV.4. Miejsce w seriach podręczników: NE kl. 2 (ZPiR kl. 1–2) · Pazdro kl. 2 · GWO kl. 1 · technikum NE kl. 2. Nazwy wydawnictw i serii podano tylko informacyjnie – materiał nie jest z nimi powiązany. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

Funkcja kwadratowa w zastosowaniach – najważniejsze wiadomości

Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Trzy postacie wzoru** funkcji kwadratowej ($a \neq 0$): ogólna $f(x) = ax^2 + bx + c$, kanoniczna $f(x) = a(x - p)^2 + q$, iloczynowa $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (gdy $\Delta \geq 0$). Wierzchołek paraboli to punkt $W = (p, q)$.
- **Wybierz postać do danych.** Znasz wierzchołek – zacznij od postaci kanonicznej. Znasz miejsca zerowe – od iloczynowej. Znasz trzy punkty wykresu – ułóż układ równań z niewiadomymi a, b, c. Brakujący współczynnik a obliczysz z jeszcze jednego punktu wykresu.
- **Symetria.** Wykres jest symetryczny względem prostej $x = p$. Miejsca zerowe leżą symetrycznie: $p = \frac{x_1 + x_2}{2}$, a dla każdej liczby t zachodzi $f(p - t) = f(p + t)$. Wykres przecina oś Oy w punkcie $(0, c)$, bo $f(0) = c$.
- **Wartości w przedziale domkniętym** $\langle m, n\rangle$: oblicz $f(m)$ i $f(n)$, a jeśli p należy do przedziału – także $f(p) = q$. Największa z tych liczb to wartość największa, najmniejsza – wartość najmniejsza. Gdy p leży poza przedziałem, funkcja jest w nim monotoniczna i obie wartości są na końcach przedziału.
- **W całej dziedzinie** $\mathbb{R}$: dla $a > 0$ najmniejszą wartością jest q (największej nie ma), zbiór wartości to $\langle q, +\infty)$; dla $a < 0$ największą wartością jest q, zbiór wartości to $(-\infty, q\rangle$. Pytanie „kiedy?” – odpowiedzią jest p; pytanie „ile najwięcej/najmniej?” – q.
- **Optymalizacja w 5 krokach.** 1) Oznacz zmienną (z jednostką). 2) Wyraź pozostałe wielkości przez tę zmienną. 3) Zapisz wzór funkcji jednej zmiennej. 4) Wyznacz dziedzinę z warunków zadania (np. długości dodatnie). 5) Oblicz $p = \frac{-b}{2a}$, sprawdź, że p należy do dziedziny, i odpowiedz na pytanie (wymiary, wartość).
- **Za co CKE nie daje punktów:** obliczenie pola dla kilku wybranych liczb i wskazanie największego wyniku – 0 pkt; brak dziedziny obniża ocenę; funkcja „połowy pola” bez komentarza – co najwyżej 3 z 4 pkt. Pochodna (zakres rozszerzony) nie jest tu potrzebna.
- W karcie wzorów CKE są: postać ogólna, kanoniczna i iloczynowa oraz $p = \frac{-b}{2a}$, $q = \frac{-\Delta}{4a}$. Wartość q prościej i bezpieczniej obliczyć jako $f(p)$.

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. Wierzchołkiem paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej *f*, jest punkt *W* = (1, −3), a wykres przechodzi przez punkt (3, 5). Wyznacz wzór funkcji *f* w postaci ogólnej.

Postać kanoniczna: $f(x) = a(x-1)^2 - 3$. Punkt (3, 5): $5 = a(3-1)^2 - 3$, $4a = 8$, $a = 2$.

$f(x) = 2(x-1)^2 - 3 = 2(x^2 - 2x + 1) - 3 = 2x^2 - 4x - 1$.

Przykład 2. Funkcja kwadratowa *f* ma miejsca zerowe −1 i 5, a jej wykres przecina oś *Oy* w punkcie (0, 10). Wyznacz wzór funkcji *f* w postaci ogólnej i współrzędne wierzchołka paraboli.

Postać iloczynowa: $f(x) = a(x+1)(x-5)$. $f(0) = a \cdot 1 \cdot (-5) = -5a = 10$, więc $a = -2$.

$f(x) = -2(x^2 - 4x - 5) = -2x^2 + 8x + 10$.

$p = \frac{-1+5}{2} = 2$ (średnia miejsc zerowych), $q = f(2) = -8 + 16 + 10 = 18$. Wierzchołek: $W = (2, 18)$.

Przykład 3. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^2 - 4x + 1$ a) w przedziale $\langle -1, 3\rangle$, b) w przedziale $\langle 3, 5\rangle$.

$p = \frac{4}{2} = 2$, $f(2) = 4 - 8 + 1 = -3$.

a) $2 \in \langle -1, 3\rangle$. $f(-1) = 1 + 4 + 1 = 6$, $f(3) = 9 - 12 + 1 = -2$, $f(2) = -3$. Najmniejsza: −3, największa: 6.

b) $2 \notin \langle 3, 5\rangle$ – funkcja jest w tym przedziale rosnąca. $f(3) = -2$, $f(5) = 25 - 20 + 1 = 6$. Najmniejsza: −2, największa: 6.

Przykład 4. Z siatki o długości 60 m ogradzamy prostokątny wybieg przy ścianie budynku (ściany nie ogradzamy). Wybieg dzielimy na dwie części przegrodą z tej samej siatki, prostopadłą do ściany. Oblicz wymiary wybiegu o największym polu.

x – długość odcinków siatki prostopadłych do ściany (w metrach); są trzy takie odcinki (dwa boki i przegroda).

Bok równoległy do ściany: $60 - 3x$. Warunki: $x > 0$ i $60 - 3x > 0$, więc dziedzina: $x \in (0, 20)$.

Pole: $P(x) = x(60 - 3x) = -3x^2 + 60x$. Ramiona w dół, więc największa wartość jest w wierzchołku: $p = \frac{-60}{-6} = 10 \in (0, 20)$.

Wymiary: 10 m × 30 m, pole $P(10) = 300$ m².

Przykład 5. Piłkę kopnięto pionowo w górę. Jej wysokość (w metrach) po *t* sekundach opisuje wzór $h(t) = -5t^2 + 25t + 0{,}5$ (do chwili upadku). Oblicz największą wysokość piłki. Przez ile sekund piłka była na wysokości co najmniej 20,5 m?

$p = \frac{-25}{-10} = 2{,}5$; $h(2{,}5) = -31{,}25 + 62{,}5 + 0{,}5 = 31{,}75$. Największa wysokość: 31,75 m (po 2,5 s).

$-5t^2 + 25t + 0{,}5 \geq 20{,}5 \Leftrightarrow -5t^2 + 25t - 20 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 \leq 0 \Leftrightarrow t \in \langle 1, 4\rangle$.

Piłka była na tej wysokości przez 4 − 1 = 3 sekundy.

Podgląd • Pierwsza Ławka

Funkcja kwadratowa w zastosowaniach – ćwiczenia

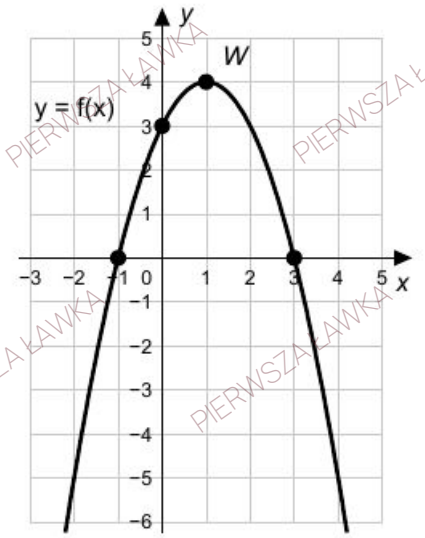
KARTA 2/9

Ćwiczę umiejętności z działu

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 23 pkt

Zadanie 1. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej *f* w postaci ogólnej. a) Wierzchołkiem wykresu jest punkt (−1, 4), a *f*(1) = −4. b) Miejscami zerowymi są liczby 2 i 6, a *f*(0) = 6. c) Wykres przechodzi przez punkty (0, 1), (1, 4) i (−1, 0). ___ / 3 pkt

Zadanie 2. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji kwadratowej *f*. Wierzchołek i miejsca zerowe mają współrzędne całkowite. Uzupełnij. ___ / 4 pkt



1. Postać kanoniczna: $f(x) =$ _____
2. Postać iloczynowa: $f(x) =$ _____
3. Postać ogólna: $f(x) =$ _____
4. Zbiór wartości funkcji *f*: _____

Zadanie 3. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji w podanym przedziale. a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$, **przedział** $\langle 0, 4\rangle$. **b)** $g(x) = -2x^2 + 8x - 1$, **przedział** $\langle 3, 5\rangle$. **c)** $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$, **przedział** $\langle -4, 1\rangle$.

___ / 3 pkt

Zadanie 4. Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej *f* są liczby −7 i 3. Osią symetrii wykresu funkcji *f* jest prosta o równaniu

___ / 1 pkt

A. $x = -2$ **B.** $x = 5$ **C.** $x = 2$ **D.** $x = -5$

Zadanie 5. Dopasuj do każdego opisu wzór funkcji kwadratowej (jeden wzór jest zbędny).

___ / 3 pkt

1. wierzchołek (2, −1), ramiona skierowane w górę	a) $f(x) = (x - 2)^2 - 1$
2. miejsca zerowe −1 i 2, ramiona skierowane w dół	b) $f(x) = -(x - 2)(x + 1)$
3. wykres przecina oś *Oy* w punkcie (0, −1), a wierzchołek leży na osi *Ox*	c) $f(x) = -(x - 1)^2$
	d) $f(x) = (x + 2)^2 - 1$

1 ____ 2 ____ 3 ____

Podgląd • Pierwsza Ławka

Funkcja kwadratowa w zastosowaniach – zadania typu maturalnego

Polecenia i punktacja jak na maturze 2027

KARTA 3/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 15 pkt

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wykres funkcji kwadratowej f ma wierzchołek $W = (-3, 2)$ i przechodzi przez punkt $(-1, 10)$.
Funkcja f jest określona wzorem ___ / 1 pkt

A. $f(x) = 2(x - 3)^2 + 2$

B. $f(x) = 4(x + 3)^2 + 2$

C. $f(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 + 2$

D. $f(x) = 2(x + 3)^2 + 2$

Zadanie 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Najmniejsza wartość funkcji $f(x) = x^2 + 6x - 2$ w przedziale $\langle 0, 2\rangle$ jest równa ___ / 1 pkt

A. -3 **B.** -11 **C.** -2 **D.** 14

Zadanie 3. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Zbiorem wartości funkcji $f(x) = -x^2 + 8x - 7$ jest przedział ___ / 1 pkt

A. $\langle 9, +\infty)$ **B.** $(-\infty, 9\rangle$ **C.** $\langle 1, 7\rangle$ **D.** $(-\infty, 4\rangle$

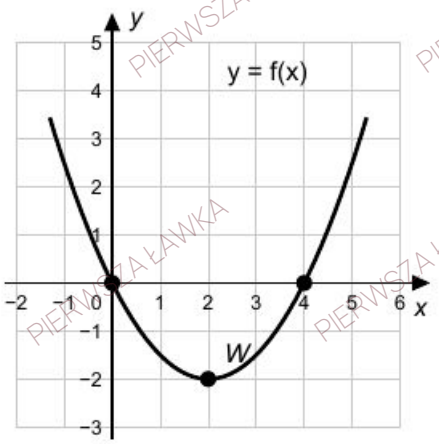
Zadanie 4. Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$.
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Największa wartość funkcji f w przedziale $\langle 0, 4\rangle$ jest równa $f(0)$.	**P**	**F**
2. Najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $\langle 0, 4\rangle$ jest równa -6.	**P**	**F**

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 5. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji kwadratowej *f*. Wierzchołek *W* paraboli i miejsca zerowe funkcji *f* mają współrzędne całkowite.
Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiedni wzór i odpowiednią liczbę w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

___ / 2 pkt



1. Wzór funkcji *f* w postaci kanonicznej to $f(x) =$ _____ .
2. Największa wartość funkcji *f* w przedziale $\langle -1, 3 \rangle$ jest równa _____ .

Zadanie 6. Wykres funkcji kwadratowej *f* jest symetryczny względem prostej o równaniu $x = -1$. Jednym z miejsc zerowych funkcji *f* jest liczba 2, a wykres funkcji *f* przecina oś *Oy* w punkcie (0, 4). Wyznacz wzór funkcji *f* w postaci ogólnej. Zapisz obliczenia.

___ / 4 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Kartkówka 1: wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej – grupa A

15 minut · 9 pkt

KARTA 4/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 9 pkt

Zadanie 1. Wierzchołkiem paraboli $y = -3(x + 5)^2 - 1$ jest punkt ___ / 1 pkt

A. $(-5, -1)$ **B.** $(-3, -1)$ **C.** $(5, -1)$ **D.** $(-5, 1)$

Zadanie 2. Funkcja kwadratowa f ma miejsca zerowe -2 i 6. ___ / 2 pkt

1. Osią symetrii wykresu funkcji f jest prosta o równaniu _____ .
2. Jeżeli $f(0) = -24$, to $f(x) =$ _____ (postać iloczynowa).

Zadanie 3. Wierzchołkiem paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej f, jest punkt $W = (4, -3)$, a wykres przechodzi przez punkt $(2, 5)$. Wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 4. Wykres funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ przechodzi przez punkty $(0, -4)$, $(1, 0)$ i $(-1, -6)$. Wyznacz wzór funkcji f. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Sprawdzian: Funkcja kwadratowa w zastosowaniach – grupa A

45 minut · 20 pkt

KARTA 8/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 20 pkt

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wierzchołkiem paraboli, która jest wykresem funkcji $f(x) = -2x^2 + 12x - 11$, jest punkt

___ / 1 pkt

A. (3, 7) **B.** (−3, −65) **C.** (3, −7) **D.** (6, −11)

Zadanie 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Funkcja kwadratowa f ma miejsca zerowe −5 i 1, a jej wykres przechodzi przez punkt (0, 15). Funkcja f jest określona wzorem

___ / 1 pkt

A. $f(x) = -3(x - 5)(x + 1)$ **B.** $f(x) = 3(x + 5)(x - 1)$

C. $f(x) = -3(x + 5)(x - 1)$ **D.** $f(x) = 15(x + 5)(x - 1)$

Zadanie 3. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Najmniejsza wartość funkcji $f(x) = (x - 4)^2 + 1$ w przedziale $\langle -1, 2 \rangle$ jest równa

___ / 1 pkt

A. 26 **B.** 5 **C.** 1 **D.** 4

Zadanie 4. Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

___ / 1 pkt

1. Funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 3)$.	**P**	**F**
2. Największa wartość funkcji f w przedziale $\langle 4, 6 \rangle$ jest równa 4.	**P**	**F**

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Funkcja kwadratowa w zastosowaniach – kartkówki, sprawdzian i karty pracy z powtórką, matematyka, klasa 2 LO i technikum (zakres podstawowy)

Podgląd pokazał 10 z 32 stron. Pełna wersja: 32 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Funkcja kwadratowa w zastosowaniach – najważniejsze wiadomości – 3 zadania, 8 pkt
- Karta 2: Funkcja kwadratowa w zastosowaniach – ćwiczenia – 8 zadań, 23 pkt
- Karta 3: Funkcja kwadratowa w zastosowaniach – zadania typu maturalnego – 8 zadań, 15 pkt
- Karta 4: Kartkówka 1: wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej – grupa A – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 5: Kartkówka 1: wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej – grupa B – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 6: Kartkówka 2: największa i najmniejsza wartość, optymalizacja – grupa A – 3 zadania, 8 pkt
- Karta 7: Kartkówka 2: największa i najmniejsza wartość, optymalizacja – grupa B – 3 zadania, 8 pkt
- Karta 8: Sprawdzian: Funkcja kwadratowa w zastosowaniach – grupa A – 9 zadań, 20 pkt
- Karta 9: Sprawdzian: Funkcja kwadratowa w zastosowaniach – grupa B – 9 zadań, 20 pkt Karta 1 przypomina teorię i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku.

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matematyka-liceum-klasa-2-dzial-02-funkcja-kwadratowa-w-zastosowaniac