PIERWSZA ŁAWKA · ZESTAW DZIAŁOWY · MATEMATYKA · KLASA 4 LO I TECHNIKUM · ZAKRES PODSTAWOWY

Dział 5. Dowody w matematyce

Jak pisać dowód na maturze: podzielność i reszty z dzielenia (zapis n = 2k + 1, k ∈ ℤ), dowody nierówności i tożsamości algebraicznych (kwadrat różnicy, średnia arytmetyczna i geometryczna), dowód nie wprost (niewymierność), dowody geometryczne z przystawaniem, podobieństwem, kątami w okręgu i wspólną wysokością; kontrprzykład; schematy oceniania CKE. Dziewięć kart: teoria z przykładami, ćwiczenia, zadania typu maturalnego, dwie kartkówki (A i B) i sprawdzian (A i B) – z kluczem i zasadami oceniania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Dowody w matematyce – najważniejsze wiadomości** Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka	3 zad. 7 pkt
2	**Dowody w matematyce – ćwiczenia** Ćwiczę umiejętności z działu	8 zad. 17 pkt
3	**Dowody w matematyce – zadania typu maturalnego** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	8 zad. 15 pkt
4	**Kartkówka 1: dowody algebraiczne (podzielność, reszty, nierówności) – grupa A** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
5	**Kartkówka 1: dowody algebraiczne (podzielność, reszty, nierówności) – grupa B** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
6	**Kartkówka 2: dowody geometryczne – grupa A** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
7	**Kartkówka 2: dowody geometryczne – grupa B** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
8	**Sprawdzian: Dowody w matematyce – grupa A** 60 minut · 20 pkt	10 zad. 20 pkt
9	**Sprawdzian: Dowody w matematyce – grupa B** 60 minut · 20 pkt	10 zad. 20 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 przypomina najważniejsze wiadomości z działu i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku – od niej warto zacząć.

- Karta 2 to ćwiczenia, a karta 3 – zadania w formule matury 2027 (polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE).
- Karty 4–7 to dwie kartkówki (po 15 minut), każda w grupach A i B. Karty 8–9 to sprawdzian (45 minut) w grupach A i B – te same typy zadań i ta sama punktacja, inne liczby.
- Klucz na końcu zestawu zawiera odpowiedzi, przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE (kamienie milowe, błąd rachunkowy = −1 pkt).
- Osobny plik „Powtórka" zbiera definicje, wzory (z zaznaczeniem, które są w karcie wzorów CKE), typowe błędy i test „Sprawdź się".

Materiał oryginalny. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: I.2, VIII.5, VIII.11 (+ II.1, I.1); cele ogólne IV.1–IV.3; dowody PP pkt 2 i 6 z warunków realizacji. Miejsce w seriach podręczników: NE kl. 4 (Przykłady dowodów w matematyce) · Pazdro i GWO – dowody przy działach kl. 1–3; technikum NE kl. 5; powtórzenie maturalne. Nazwy wydawnictw i serii podano tylko informacyjnie – materiał nie jest z nimi powiązany. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

PIERWSZA ŁAWKA

Dowody w matematyce – najważniejsze wiadomości

Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka

KARTA 1/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 7 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Dowód** to ciąg wniosków, z których każdy wynika z założeń, definicji albo znanego twierdzenia. Polecenie „Wykaż, że…” wymaga dowodu dla **wszystkich** obiektów z treści. Sprawdzenie tezy na przykładach nie jest dowodem – CKE daje za to 0 punktów. Za to jeden kontrprzykład wystarczy, żeby wykazać, że zdanie „dla każdego…” jest fałszywe.
- **Zapis liczb całkowitych.** Liczba parzysta: $2k$, nieparzysta: $2k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Trzy kolejne liczby całkowite: n, $n + 1$, $n + 2$. Liczba, która przy dzieleniu przez m daje resztę r: $mk + r$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ i $0 \le r < m$. Każdą nową literę opisz (np. „gdzie $k \in \mathbb{Z}$”) – bez tego CKE nie przyznaje maksymalnej liczby punktów.
- **Podzielność.** Przekształć liczbę do postaci $m \cdot W$ i napisz, dlaczego W jest liczbą całkowitą. Pomocne fakty: iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest parzysty; iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez 6; suma liczb podzielnych przez m jest podzielna przez m. **Reszta** r z dzielenia przez m: zapisz liczbę jako $m \cdot W + r$, gdzie $W \in \mathbb{Z}$ i $0 \le r < m$. Gdy trzeba rozpatrzyć przypadki (liczba parzysta i nieparzysta, reszty 0, 1, 2), rozpatrz **wszystkie**.
- **Nierówności i tożsamości.** Przekształcaj równoważnie ($\Leftrightarrow$) do nierówności oczywiście prawdziwej, np. $(a - b)^2 \ge 0$ albo $(x - 3)^2 + 1 > 0$, i napisz uzasadnienie: kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny, a suma liczby nieujemnej i dodatniej jest dodatnia. W tożsamości przekształcaj jedną stronę, aż otrzymasz drugą. Wzory skróconego mnożenia zapisuj jawnie – to w nich jest najwięcej błędów.
- **Średnia arytmetyczna i geometryczna.** Dla $a \ge 0$ i $b \ge 0$: $\frac{a + b}{2} \ge \sqrt{ab}$, bo $a + b - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \ge 0$.
- **Dowód nie wprost.** Zakładamy, że teza jest fałszywa, i dochodzimy do sprzeczności z założeniem albo ze znanym faktem. Tak dowodzi się niewymierności liczb $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\log_2 5$ (lista dowodów z podstawy programowej).
- **Dowody geometryczne** (VIII.11). Narzędzia: cechy przystawania bok–bok–bok, bok–kąt–bok, kąt–bok–kąt (cechy „kąt–kąt–kąt” **nie ma** wśród cech przystawania); cechy podobieństwa bbb, bkb, kkk; kąty wierzchołkowe, odpowiadające, naprzemianległe; kąt wpisany jest połową kąta środkowego opartego na tym samym łuku, kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe, kąt oparty na półokręgu jest prosty; trójkąty o **wspólnej wysokości** mają pola w stosunku podstaw.
- **Czego nie wolno:** przyjmować konkretnych miar kątów ani długości („niech kąt ma 40°” – 0 punktów), odczytywać własności z rysunku (kąt prosty, równe odcinki), korzystać z tezy w trakcie dowodu. Wprowadzony odcinek opisz słowami („h – odległość punktu A od prostej BC”). Dowód kończy zdanie zamykające i „To należało wykazać.” – wynik pośredni nie jest tezą.

- **Jak ocenia CKE** (dowód na PP, zwykle 2 punkty): 1 punkt – przekształcenie do postaci dogodnej do wnioskowania albo połowa argumentacji (np. jeden z dwóch przypadków, jedna para równych kątów); 2 punkty – pełne rozumowanie z argumentem zamykającym. W karcie wzorów są wzory skróconego mnożenia, cechy przystawania i podobieństwa trójkątów oraz twierdzenia o kątach w okręgu – nie ma tam gotowych schematów dowodów.

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych przy dzieleniu przez 12 daje resztę 11.

Kolejne liczby nieparzyste: $2k + 1$, $2k + 3$, $2k + 5$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

$(2k + 1)^2 + (2k + 3)^2 + (2k + 5)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4k^2 + 12k + 9 + 4k^2 + 20k + 25 = 12k^2 + 36k + 35$.

$12k^2 + 36k + 35 = 12(k^2 + 3k + 2) + 11$. Liczba $k^2 + 3k + 2$ jest całkowita, bo $k \in \mathbb{Z}$, a $0 \leq 11 < 12$.

Zatem reszta z dzielenia przez 12 jest równa 11. To należało wykazać.

Przykład 2. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^2 + 5 \geq 4x + 1$.

$x^2 + 5 \geq 4x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 \geq 0$.

Ostatnia nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x, bo kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny. Przekształcenia były równoważne, więc nierówność wyjściowa też jest prawdziwa. To należało wykazać.

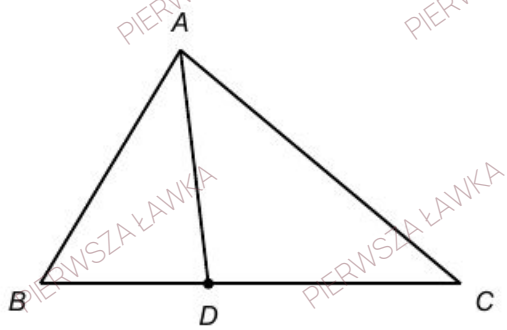
Przykład 3. Liczby rzeczywiste a i b spełniają warunki $a + b = 5$ oraz $ab = 3$. Wykaż, że $a^2 + b^2 = 19$.

Ze wzoru skróconego mnożenia: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, więc $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$.

Podstawiamy dane: $a^2 + b^2 = 5^2 - 2 \cdot 3 = 25 - 6 = 19$. To należało wykazać.

Uwaga: nie trzeba (i nie warto) obliczać liczb a i b.

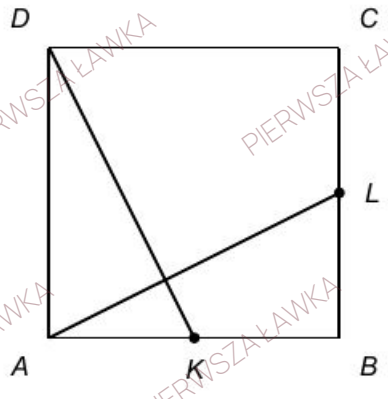
Przykład 4. Punkt D leży na boku BC trójkąta ABC, przy czym $|BD| : |DC| = 2 : 3$. Wykaż, że stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta ADC jest równy $\frac{2}{3}$.



Niech h oznacza odległość punktu A od prostej BC. Jest to wysokość obu trójkątów ABD i ADC poprowadzona z wierzchołka A (ich podstawy BD i DC leżą na prostej BC).

$\frac{P_{ABD}}{P_{ADC}} = \frac{\frac{1}{2}|BD| \cdot h}{\frac{1}{2}|DC| \cdot h} = \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{2}{3}$. To należało wykazać.

Przykład 5. Punkty *K* i *L* są środkami boków *AB* i *BC* kwadratu *ABCD* (zobacz rysunek). Wykaż, że |*DK*| = |*AL*|.



Trójkąty *DAK* i *ABL*: |*DA*| = |*AB*| (boki kwadratu), |*AK*| = |*BL*| (połowy boków kwadratu), |∢ *DAK*| = |∢ *ABL*| = 90° (kąty kwadratu).
Z cechy bok–kąt–bok trójkąty *DAK* i *ABL* są przystające, więc ich trzecie boki są równe: |*DK*| = |*AL*|. To należało wykazać.

Przykład 6. Wykaż, że liczba $\sqrt{3}$ jest niewymierna.

Przypuśćmy, że $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, gdzie p, q są liczbami naturalnymi dodatnimi, a ułamek jest nieskracalny. Wtedy $p^2 = 3q^2$, więc p^2 jest podzielne przez 3.
Gdyby p nie było podzielne przez 3, to $p = 3m + 1$ albo $p = 3m + 2$ ($m \in \mathbb{Z}$), a wtedy $p^2 = 3(3m^2 + 2m) + 1$ albo $p^2 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1$ – reszta 1. Zatem $p = 3m$.
Stąd $9m^2 = 3q^2$, czyli $q^2 = 3m^2$ – tak samo q jest podzielne przez 3. Ułamek $\frac{p}{q}$ dałby się skrócić przez 3 – sprzeczność. Zatem $\sqrt{3}$ jest liczbą niewymierną. To należało wykazać.

ZADANIA

Zadanie 1. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 3 pkt

1. Sprawdzenie, że teza jest prawdziwa dla $n = 1, 2, 3, 4$, jest dowodem, że jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.	**P**	**F**
2. Każdą liczbę nieparzystą można zapisać w postaci $2k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.	**P**	**F**
3. Iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest liczbą parzystą.	**P**	**F**

Zadanie 2. Zapisz za pomocą liczby całkowitej *k* (albo *n*). ___ / 3 pkt

1. liczba parzysta: _____
2. trzy kolejne liczby całkowite: _____
3. liczba, która przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3: _____

Zadanie 3. Liczba $12k + 8$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, jest dla każdego *k* podzielna przez ___ / 1 pkt

A. 12 **B.** 24 **C.** 8 **D.** 4

Podgląd • Pierwsza Ławka

Dowody w matematyce – ćwiczenia

Ćwiczę umiejętności z działu

KARTA 2/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 17 pkt

Zadanie 1. Wykaż, że suma czterech kolejnych liczb całkowitych jest liczbą parzystą, która nie jest podzielna przez 4. ___ / 2 pkt

Zadanie 2. Wykaż, że kwadrat liczby całkowitej niepodzielnej przez 3 przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1. ___ / 2 pkt

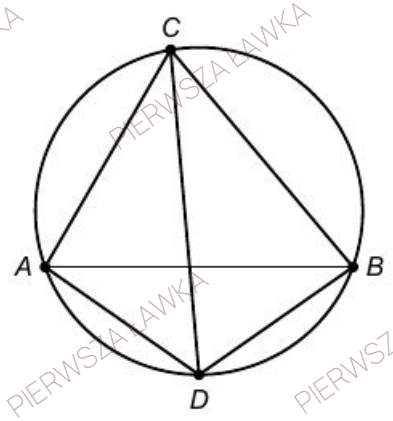
Zadanie 3. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $2x^2 + 3 > 4x$. ___ / 2 pkt

Zadanie 4. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 3 pkt

1. Aby wykazać, że liczba $4n + 6$ nie jest podzielna przez 4 dla każdej liczby całkowitej n, wystarczy zapisać ją jako $4(n + 1) + 2$.	**P**	**F**
2. Jeżeli równość jest prawdziwa dla $n = 1, 2, \ldots, 10$, to jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.	**P**	**F**
3. Jeden kontrprzykład wystarcza, aby wykazać, że zdanie „dla każdej liczby naturalnej n …” jest fałszywe.	**P**	**F**

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 6. Trójkąt *ABC* jest wpisany w okrąg. Dwusieczna kąta *ACB* przecina ten okrąg w punkcie *D* różnym od *C* (zobacz rysunek). Wykaż, że $|AD| = |BD|$. ___ / 2 pkt



Zadanie 7. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Poprawnym uzasadnieniem, że liczba $n^2 + n$ jest parzysta dla każdej liczby całkowitej n, jest zapis ___ / 1 pkt

A. dla $n = 1, 2, 3$ otrzymujemy 2, 6, 12 – liczby parzyste

B. $n^2 + n = 2k$, więc liczba jest parzysta

C. $n^2 + n = n(n + 1)$ – iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych, więc liczba parzysta

D. $n^2 + n > 0$, więc liczba jest parzysta

Zadanie 8. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Dla każdej liczby całkowitej n liczba $2(n + 3)(n + 4)$ jest podzielna przez 4.	**P**	**F**
2. Dla każdej liczby całkowitej n liczba $n(n + 2)$ jest podzielna przez 2.	**P**	**F**

Podgląd • Pierwsza Ławka

Kartkówka 1: dowody algebraiczne (podzielność, reszty, nierówności) – grupa A

15 minut · 8 pkt

KARTA 4/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

Zadanie 1. Zapisz za pomocą liczby całkowitej *k*. ___ / 2 pkt

1. liczba nieparzysta: _____
2. liczba, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2: _____

Zadanie 2. Niech $k \in \mathbb{Z}$. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 2 pkt

1. Liczba $6k + 4$ jest parzysta.	**P**	**F**
2. Liczba $6k + 4$ jest podzielna przez 4 dla każdego k.	**P**	**F**

Zadanie 3. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $(n + 7)^2 - (n + 1)^2$ jest podzielna przez 12. ___ / 2 pkt

Zadanie 4. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^2 + 10 > 6x$. ___ / 2 pkt

PIERWSZA ŁAWKA

Kartkówka 1: dowody algebraiczne (podzielność, reszty, nierówności) – grupa B

15 minut · 8 pkt

KARTA 5/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

Zadanie 1. Zapisz za pomocą liczby całkowitej *k*. ___ / 2 pkt

1. dwie kolejne liczby nieparzyste: _____
2. liczba, która przy dzieleniu przez 6 daje resztę 4: _____

Zadanie 2. Niech $k \in \mathbb{Z}$. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 2 pkt

1. Liczba $10k + 5$ jest nieparzysta.	**P**	**F**
2. Liczba $10k + 5$ jest podzielna przez 10 dla każdego k.	**P**	**F**

Zadanie 3. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $(n + 4)^2 - (n - 2)^2$ jest podzielna przez 12. ___ / 2 pkt

Zadanie 4. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^2 + 20 > 8x$. ___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Kartkówka 2: dowody geometryczne – grupa A

15 minut · 8 pkt

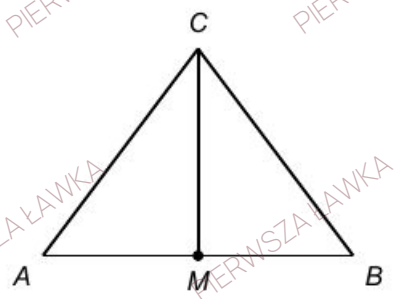
KARTA 6/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

Zadanie 1. Cechą przystawania trójkątów nie jest cecha ___ / 1 pkt

A. kąt–kąt–kąt **B.** bok–kąt–bok **C.** kąt–bok–kąt **D.** bok–bok–bok

Zadanie 2. W trójkącie *ABC* boki *AC* i *BC* mają równe długości, a *M* jest środkiem boku *AB* (zobacz rysunek). Wykaż, że *CM* ⊥ *AB*. ___ / 2 pkt



Zadanie 3. Punkt *P* leży na boku *AB* trójkąta *ABC*, przy czym |*AP*| = 2|*PB*|. Wykaż, że pole trójkąta *APC* jest dwa razy większe od pola trójkąta *PBC*. ___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Sprawdzian: Dowody w matematyce – grupa A

60 minut · 20 pkt

KARTA 8/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 20 pkt

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczba $15k + 10$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, jest dla każdego k podzielna przez ___ / 1 pkt

A. 10 **B.** 25 **C.** 5 **D.** 15

Zadanie 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Reszta z dzielenia liczby $9k + 7$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, przez 3 jest równa ___ / 1 pkt

A. 0 **B.** 1 **C.** 7 **D.** 2

Zadanie 3. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Dla każdej liczby całkowitej n liczba $n(n + 1)(n + 2)$ jest podzielna przez 6.	**P**	**F**
2. Dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^2 + 1$ jest nieparzysta.	**P**	**F**

Zadanie 4. Wykaż, że liczba $2 + \sqrt{3}$ jest niewymierna. Skorzystaj z tego, że $\sqrt{3}$ jest liczbą niewymierną. ___ / 2 pkt

Zadanie 5. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $4n^2 + 4n + 9$ przy dzieleniu przez 8 daje resztę 1. ___ / 2 pkt

Zadanie 6. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność $9a^2 + b^2 \geq 6ab$. ___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Dowody w matematyce – kartkówki, sprawdzian i karty pracy z powtórką, matematyka, klasa 4 LO i technikum (zakres podstawowy)

Podgląd pokazał 11 z 36 stron. Pełna wersja: 36 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Dowody w matematyce – najważniejsze wiadomości – 3 zadania, 7 pkt
- Karta 2: Dowody w matematyce – ćwiczenia – 8 zadań, 17 pkt
- Karta 3: Dowody w matematyce – zadania typu maturalnego – 8 zadań, 15 pkt
- Karta 4: Kartkówka 1: dowody algebraiczne (podzielność, reszty, nierówności) – grupa A – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 5: Kartkówka 1: dowody algebraiczne (podzielność, reszty, nierówności) – grupa B – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 6: Kartkówka 2: dowody geometryczne – grupa A – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 7: Kartkówka 2: dowody geometryczne – grupa B – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 8: Sprawdzian: Dowody w matematyce – grupa A – 10 zadań, 20 pkt
- Karta 9: Sprawdzian: Dowody w matematyce – grupa B – 10 zadań, 20 pkt Karta 1 przypomina teorię i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku.

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail
pierwszalawka.pl/material/matematyka-liceum-klasa-4-dzial-05-dowody-w-matematyce