PIERWSZA ŁAWKA · ZBIÓR ZADAŃ MATURALNYCH · PP · MATEMATYKA · MATURA 2027 · POZIOM PODSTAWOWY

Rozdział 12. Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…”

Dowody podzielności i reszt z dzielenia (liczby nieparzyste n = 2k + 1, iloczyny kolejnych liczb, przypadki reszt, dwie liczby z danymi resztami, sumy potęg), nierówności dla każdej liczby rzeczywistej przez kwadrat różnicy, zapis dowodu i argument zamykający – zadanie za 2 punkty obecne w każdym arkuszu podstawowym. 70 zadań maturalnych z matematyki (poziom podstawowy) w trzech sekcjach: wprowadzające, maturalne i trudniejsze, z repetytorium, wzorcowymi rozwiązaniami i kluczem z zasadami oceniania w stylu CKE.

Karta	Temat	Zadania
1	**Rozdział 12. Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…” – repetytorium** Najważniejsze wiadomości, wzorcowe rozwiązania, jak oceni to CKE	4 zad. 8 pkt
2	**A. Zadania wprowadzające – Dowody w matematyce** Proste ćwiczenia umiejętności z tematu	11 zad. 24 pkt
3	**A. Zadania wprowadzające – trening: Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…”** Zadania krok po kroku	8 zad. 17 pkt
4	**B. Zadania maturalne – Dowody w matematyce** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	26 zad. 51 pkt
5	**B. Zadania maturalne – Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…”** Na poziomie arkuszy CKE 2025–2026	15 zad. 25 pkt
6	**C. Zadania trudniejsze – Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…”** Nietypowe ujęcia i zadania wieloetapowe	6 zad. 11 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Rozdział zaczyna się od repetytorium: najważniejsze wiadomości, wzorcowe rozwiązania krok po kroku i to, jak CKE ocenia ten typ zadań.
- Sekcja A to zadania wprowadzające, sekcja B – zadania maturalne (formuły poleceń i punktacja jak w arkuszach CKE), sekcja C – zadania trudniejsze.

Rozdział 12. Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…” – repetytorium

Najważniejsze wiadomości, wzorcowe rozwiązania, jak oceni to CKE

KARTA 1/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Gdzie w arkuszu.** Dowód podzielności lub reszty z dzielenia jest w **każdym** arkuszu PP (2023 – zad. 3, 2024 – zad. 3, 2025 – zad. 5, 2026 – zad. 7) i zawsze za 2 punkty. To jedno z najtrudniejszych zadań: poziom wykonania 43%, 56%, 32% i 41%. Formuła: „Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej (nieparzystej) n liczba … jest podzielna przez … / przy dzieleniu przez … daje resztę …”. Przy dowodzie nie ma „Zapisz obliczenia”.
- **Szkielet dowodu (4 kroki).** 1) Założenia w symbolach: „n – liczba całkowita nieparzysta, więc $n = 2k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$”. 2) Przekształcenie do postaci dogodnej: wyłącz dzielnik przed nawias albo zapisz liczbę jako $m \cdot K + r$. 3) Argument słowny: „$k(k + 3)$ jest parzysta, bo k i $k + 3$ mają różną parzystość”, „$K \in \mathbb{Z}$, więc …”. 4) Zakończenie: „To należało wykazać.”
- **Narzędzia.** Iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych $n(n + 1)$ jest parzysty; tak samo $n(n + 3)$, $n(n + 5)$ – czynniki mają różną parzystość. Liczba postaci $m \cdot K + r$, gdzie $K \in \mathbb{Z}$ i $0 \leq r < m$, daje przy dzieleniu przez m resztę r. Gdy teza zależy od reszty (np. „n niepodzielna przez 3”), rozpatrz **wszystkie** przypadki: $n = 3k + 1$ i $n = 3k + 2$. Sumę potęg zapisz jako iloczyn: $5^{12} + 5^{11} - 5^{10} = 5^{10}(25 + 5 - 1) = 29 \cdot 5^{10}$.
- **Nierówności „dla każdej liczby rzeczywistej”.** Przenieś wszystko na jedną stronę i zapisz jako kwadrat różnicy (lub sumę kwadratów) plus liczbę nieujemną: $9x^2 + 4 - 12x = (3x - 2)^2 \geq 0$. Zakończ zdaniem: „kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny, więc nierówność jest prawdziwa”. Przekształcenia równoważne tezy są dozwolone – zaznacz je znakiem $\Leftrightarrow$.

Poziom	Kamień milowy (zasady oceniania 2023–2026)
1 pkt	przekształcenie do postaci dogodnej do wnioskowania, np. $4(k(k + 3) + 4)$, ALBO jeden z przypadków (parzystość, reszta), ALBO połowa argumentacji (np. tylko podzielność przez 2)
2 pkt	pełne rozumowanie z argumentem zamykającym
0 pkt	sprawdzenie tezy dla kilku liczb (nawet stu!) – to nie jest dowód; zapis „… = 0” zamiast uzasadnienia
uwagi	inne wyrażenie niż w treści – najwyżej 1 pkt; reszty: wszystkie przypadki – 2 pkt, co najmniej połowa – 1 pkt

- **Błędy ze sprawozdań CKE.** 2023: brak argumentu, dlaczego $4k(k + 1)$ dzieli się przez 8; nowa zmienna bez „$k \in \mathbb{Z}$”; „cecha podzielności przez 8” wymyślona przez zdającego. 2025: błędy we wzorach skróconego mnożenia i przy wyłączaniu przed nawias, zdający „nie zauważa, że dowód jest już skończony”. Diagnoza 2023: tylko 10% poprawnych – najczęściej sprawdzanie na przykładach.

Przykład 5. (dowód, 2 pkt) Wykaż, że liczba $5^{12} + 5^{11} - 5^{10}$ jest podzielna przez 29.

Wyłączamy najmniejszą potęgę: $5^{12} + 5^{11} - 5^{10} = 5^{10}(5^2 + 5 - 1) = 5^{10} \cdot 29$.

5^{10} jest liczbą całkowitą, więc liczba jest podzielna przez 29. To należało wykazać.

Obliczanie wartości tej liczby kalkulatorem nie jest dowodem (kalkulator prosty nie pokaże wszystkich cyfr).

ZADANIA

Zadanie 1. Zapisz za pomocą liczby całkowitej *k*. ___ / 3 pkt

1. liczba, która przy dzieleniu przez 9 daje resztę 4: _____
2. trzy kolejne liczby parzyste: _____
3. liczba nieparzysta podzielna przez 3: _____

Zadanie 2. Liczba $20k + 30$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, jest dla każdego *k* podzielna przez ___ / 1 pkt

A. 30 **B.** 10 **C.** 4 **D.** 20

Zadanie 3. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 3 pkt

1. Iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest liczbą parzystą.	**P**	**F**
2. Liczba $6k + 5$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, przy dzieleniu przez 3 daje resztę 5.	**P**	**F**
3. Sprawdzenie, że teza jest prawdziwa dla stu kolejnych liczb naturalnych, jest jej dowodem.	**P**	**F**

Zadanie 4. Reszta z dzielenia liczby $5(2k + 3) + 1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, przez 10 jest równa ___ / 1 pkt

A. 6 **B.** 1 **C.** 16 **D.** 0

PIERWSZA ŁAWKA

A. Zadania wprowadzające – Dowody w matematyce

Proste ćwiczenia umiejętności z tematu

KARTA 2/6

Imię i nazwisko: Data: Wynik: ..... / 24 pkt

Zadanie 1. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 3 pkt

1. Sprawdzenie, że teza jest prawdziwa dla $n = 1, 2, 3, 4$, jest dowodem, że jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.	**P**	**F**
2. Każdą liczbę nieparzystą można zapisać w postaci $2k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.	**P**	**F**
3. Iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest liczbą parzystą.	**P**	**F**

Zadanie 2. Zapisz za pomocą liczby całkowitej k (albo n). ___ / 3 pkt

1. liczba parzysta: _____
2. trzy kolejne liczby całkowite: _____
3. liczba, która przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3: _____

Zadanie 3. Liczba $12k + 8$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, jest dla każdego k podzielna przez ___ / 1 pkt

A. 12 **B.** 24 **C.** 8 **D.** 4

Zadanie 4. Wykaż, że suma czterech kolejnych liczb całkowitych jest liczbą parzystą, która nie jest podzielna przez 4. ___ / 2 pkt

Zadanie 5. Wykaż, że kwadrat liczby całkowitej niepodzielnej przez 3 przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1. ___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 6. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $2x^2 + 3 > 4x$.

___ / 2 pkt

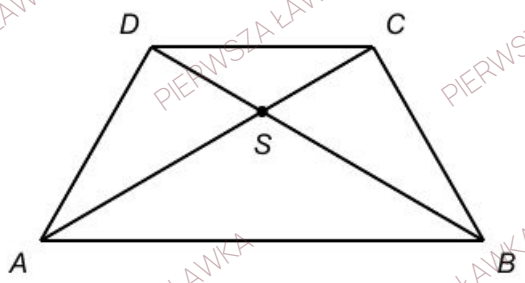
Zadanie 7. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

___ / 3 pkt

1. Aby wykazać, że liczba $4n + 6$ nie jest podzielna przez 4 dla każdej liczby całkowitej n, wystarczy zapisać ją jako $4(n + 1) + 2$.	**P**	**F**
2. Jeżeli równość jest prawdziwa dla $n = 1, 2, \ldots, 10$, to jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.	**P**	**F**
3. Jeden kontrprzykład wystarcza, aby wykazać, że zdanie „dla każdej liczby naturalnej n …” jest fałszywe.	**P**	**F**

Zadanie 8. Przekątne trapezu *ABCD* o podstawach *AB* i *CD* przecinają się w punkcie *S* (zobacz rysunek). Wykaż, że trójkąty *ASD* i *BSC* mają równe pola.

___ / 2 pkt



PIERWSZA ŁAWKA

A. Zadania wprowadzające – trening: Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…”

Zadania krok po kroku

KARTA 3/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 17 pkt

Zadanie 1. Uzupełnij tak, aby otrzymać równość prawdziwą dla każdej liczby całkowitej. ___ / 3 pkt

1. $(n + 4)^2 - n^2 = 8 \cdot (_____)$
2. $(2k + 1)^2 + 3 = 4 \cdot (_____)$
3. $6n^2 + 6n = 6n \cdot (_____)$

Zadanie 2. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^2 + 5n + 8$ jest parzysta. ___ / 2 pkt

Zadanie 3. Liczba całkowita a przy dzieleniu przez 7 daje resztę 3. Wykaż, że liczba $a^2 + 5$ jest podzielna przez 7. ___ / 2 pkt

Zadanie 4. Liczba całkowita n przy dzieleniu przez 6 daje resztę 5. Reszta z dzielenia liczby n^2 przez 6 jest równa ___ / 1 pkt

A. 4 **B.** 5 **C.** 1 **D.** 25

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 5. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $9x^2 + 4 \geq 12x$.

___ / 2 pkt

Zadanie 6. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).

___ / 3 pkt

1. Z równości $6n^2 + 6n = 6n(n + 1)$ wynika, że liczba $6n^2 + 6n$ jest podzielna przez 12 dla każdej liczby całkowitej n.	**P**	**F**
2. Zapis $6n(n + 1) = 0$ uzasadnia, że liczba $6n(n + 1)$ jest podzielna przez 6.	**P**	**F**
3. Każda liczba postaci $3k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, jest nieparzysta.	**P**	**F**

Zadanie 7. Liczba całkowita a przy dzieleniu przez 6 daje resztę 5, a liczba całkowita b – resztę 3. Wykaż, że iloczyn ab przy dzieleniu przez 6 daje resztę 3.

___ / 2 pkt

Zadanie 8. Wykaż, że liczba $7^9 - 7^8 + 7^7$ jest podzielna przez 43.

___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

B. Zadania maturalne – Dowody w matematyce

KARTA **4/6**

Polecenia i punktacja jak na maturze 2027

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 51 pkt

Zadanie 1. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $3n^2 + 3n + 6$ jest podzielna przez 6.

___ / 2 pkt

Zadanie 2. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej nieparzystej n reszta z dzielenia liczby $n^2 + 11$ przez 8 jest równa 4.

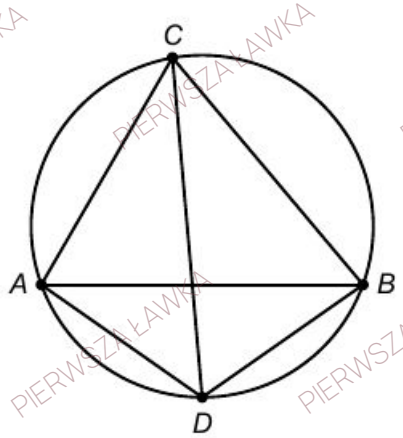
___ / 2 pkt

Zadanie 3. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność $a^2 + 4b^2 \geq 4ab$.

___ / 2 pkt

PIERWSZA ŁAWKA

Zadanie 6. Trójkąt *ABC* jest wpisany w okrąg. Dwusieczna kąta *ACB* przecina ten okrąg w punkcie *D* różnym od *C* (zobacz rysunek). Wykaż, że $|AD| = |BD|$. ___ / 2 pkt



Zadanie 7. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Poprawnym uzasadnieniem, że liczba $n^2 + n$ jest parzysta dla każdej liczby całkowitej n, jest zapis ___ / 1 pkt

A. $n^2 + n = n(n + 1)$ – iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych, więc liczba parzysta

B. dla $n = 1, 2, 3$ otrzymujemy 2, 6, 12 – liczby parzyste

C. $n^2 + n = 2k$, więc liczba jest parzysta

D. $n^2 + n > 0$, więc liczba jest parzysta

Zadanie 8. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Dla każdej liczby całkowitej n liczba $2(n + 3)(n + 4)$ jest podzielna przez 4.	**P**	**F**
2. Dla każdej liczby całkowitej n liczba $n(n + 2)$ jest podzielna przez 2.	**P**	**F**

Zadanie 9. Zapisz za pomocą liczby całkowitej *k*. ___ / 2 pkt

1. liczba nieparzysta: _____
2. liczba, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2: _____

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 10. Niech $k \in \mathbb{Z}$. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 2 pkt

1. Liczba $6k + 4$ jest parzysta.	**P**	**F**
2. Liczba $6k + 4$ jest podzielna przez 4 dla każdego k.	**P**	**F**

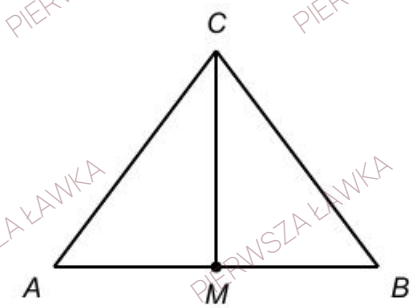
Zadanie 11. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $(n + 7)^2 - (n + 1)^2$ jest podzielna przez 12. ___ / 2 pkt

Zadanie 12. Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^2 + 13 > 4x$. ___ / 2 pkt

Zadanie 13. Cechą przystawania trójkątów nie jest cecha ___ / 1 pkt

A. bok–kąt–bok **B.** kąt–kąt–kąt **C.** kąt–bok–kąt **D.** bok–bok–bok

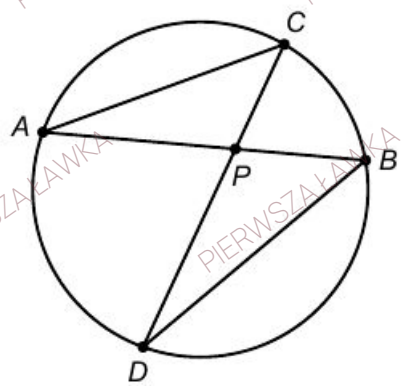
Zadanie 14. W trójkącie ABC boki AC i BC mają równe długości, a M jest środkiem boku AB (zobacz rysunek). Wykaż, że $CM \perp AB$. ___ / 2 pkt



PIERWSZA ŁAWKA

Zadanie 15. Punkt *P* leży na boku *AB* trójkąta *ABC*, przy czym $|AP| = 2|PB|$. Wykaż, że pole trójkąta *APC* jest dwa razy większe od pola trójkąta *PBC*. ___ / 2 pkt

Zadanie 16. Cięciwy *AB* i *CD* okręgu przecinają się w punkcie *P* (zobacz rysunek). Wykaż, że trójkąty *APC* i *DPB* są podobne. ___ / 3 pkt



Zadanie 17. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczba $15k + 10$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, jest dla każdego k podzielna przez ___ / 1 pkt

A. 10 **B.** 25 **C.** 5 **D.** 15

Zadanie 18. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Reszta z dzielenia liczby $9k + 7$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, przez 3 jest równa ___ / 1 pkt

A. 0 **B.** 7 **C.** 2 **D.** 1

Zadanie 19. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Dla każdej liczby całkowitej n liczba $n(n + 1)(n + 2)$ jest podzielna przez 6.	**P**	**F**
2. Dla każdej liczby całkowitej n liczba $n^2 + 1$ jest nieparzysta.	**P**	**F**

Podgląd • Pierwsza Ławka

B. Zadania maturalne – Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…”

Na poziomie arkuszy CKE 2025–2026

KARTA 5/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 25 pkt

Zadanie 1. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $5n^2 + 5n + 13$ przy dzieleniu przez 10 daje resztę 3.

___ / 2 pkt

Zadanie 2. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n, która nie jest podzielna przez 3, liczba $4n^2 + 5$ jest podzielna przez 3.

___ / 2 pkt

Zadanie 3. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej nieparzystej n liczba $n^2 + 12n + 3$ jest podzielna przez 8.

___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Matura 2027 z matematyki (poziom podstawowy) – zbiór zadań, rozdział 12: Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…”, z odpowiedziami

Podgląd pokazał 12 z 43 stron. Pełna wersja: 43 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Rozdział 12. Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…” – repetytorium – 4 zadania, 8 pkt
- A. Zadania wprowadzające – Dowody w matematyce – 11 zadań, 24 pkt
- A. Zadania wprowadzające – trening: Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…” – 8 zadań, 17 pkt
- B. Zadania maturalne – Dowody w matematyce – 26 zadań, 51 pkt
- B. Zadania maturalne – Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…” – 15 zadań, 25 pkt
- C. Zadania trudniejsze – Dowody algebraiczne: podzielność, reszty, „Wykaż, że…” – 6 zadań, 11 pkt Na końcu: klucz do zadań zamkniętych, przykładowe pełne rozwiązania i zasady oceni

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matematyka-matura-pp-zbior-zadan-rozdzial-12-dowody