PIERWSZA ŁAWKA · NAJCZĘSTSZE ZADANIA MATURALNE · PP · MATEMATYKA · MATURA 2027 · POZIOM PODSTAWOWY

H. Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne

Kąty wpisane i środkowe, wielokąty foremne, trójkąt równoboczny i punkty szczególne trójkąta (promienie okręgów wpisanego i opisanego, środek ciężkości), twierdzenie Talesa, trójkąty podobne i skala pól, dowody geometryczne za 2 i 3 punkty z zasadami oceniania jak w arkuszach CKE 2026 – zadania 19–24 arkusza podstawowego. Sześć kart: wzorcowe rozwiązania i zasady oceniania CKE, trening, zadania na poziomie matury, zadania trudniejsze i test w grupach A i B – z kluczem i schematami punktowania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne – jak rozwiązywać i jak oceni to CKE** Wzorcowe rozwiązania, pułapki, rozgrzewka	4 zad. 6 pkt
2	**Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne – trening** Zadania krok po kroku	7 zad. 12 pkt
3	**Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne – zadania na poziomie matury** Polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE 2025–2026	7 zad. 10 pkt
4	**Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne – zadania trudniejsze** Dla ambitnych – nietypowe ujęcia tego samego typu	6 zad. 13 pkt
5	**Test: Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne – grupa A** 35 minut · 12 pkt	8 zad. 12 pkt
6	**Test: Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne – grupa B** 35 minut · 12 pkt	8 zad. 12 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 pokazuje, jak CKE ocenia ten typ zadań (kamienie milowe, typowe uwagi w zasadach oceniania) oraz wzorcowe rozwiązania krok po kroku.
- Karty 2–4 prowadzą od treningu, przez zadania na poziomie matury, do zadań trudniejszych.

- Karty 5 i 6 to równoległy test (grupa A i B) z punktacją jak na maturze.
- Klucz zawiera odpowiedzi, przykładowe pełne rozwiązania i zasady oceniania w stylu CKE 2026.
- Osobny plik „Powtórka” zbiera wzory (z podziałem: są w karcie wzorów / trzeba pamiętać), typowe błędy z sprawozdań CKE i test „Sprawdź się”.

Materiał oryginalny – żadne zadanie nie jest kopią zadania CKE. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: VIII.1–VIII.12; cele ogólne IV.1, IV.4. Częstość na maturze: kąty w okręgu – w 4 z 4 arkuszy majowych 2023–2026 (4 pozycje, 4 pkt) i w 6 z 6 diagnostycznych; podobieństwo – w 3 z 4 (3 pozycje, 4 pkt), w diagnostycznych 12 pkt; trójkąt i punkty szczególne – 2024–2026; dowód geometryczny – matura 2026 (2 pkt, 27%) i próbna 2026 (3 pkt); dział VIII łącznie 15 pkt w czterech arkuszach. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

PIERWSZA ŁAWKA

Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne – jak rozwiązywać i jak oceni to CKE

Wzorcowe rozwiązania, pułapki, rozgrzewka

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 6 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Gdzie w arkuszu.** Planimetria (dział VIII) to zadania 19–24 arkusza PP. Kąty wpisane i środkowe są w każdym arkuszu 2023–2026 (zadanie zamknięte, 1 pkt), podobieństwo i Tales – w 3 z 4 (w 2023 r. otwarte za 2 pkt – 75% poprawnych rozwiązań), trójkąt i punkty szczególne – w 3 z 4. W 2026 r. doszły dwa zadania, które rozwiązało tylko 27% zdających: **dowód geometryczny** za 2 pkt (zad. 21) i luka o trójkącie równobocznym wpisanym w okrąg (zad. 22). W próbnej maturze z marca 2026 r. dowód geometryczny był za 3 pkt.
- **Kąty w okręgu.** Kąt wpisany jest połową kąta środkowego opartego na tym samym łuku. Kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe. Kąt wpisany oparty na półokręgu jest prosty. Najpierw ustal, **na którym łuku** opiera się kąt: gdy wierzchołek kąta wpisanego leży na krótszym łuku AB, kąt jest połową kąta środkowego wklęsłego (360° minus kąt AOB). Trójkąt AOB, gdzie O jest środkiem okręgu, jest równoramienny, bo $|OA| = |OB| = r$.
- **Trójkąt równoboczny i wielokąty foremne.** Dla boku a: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, promień okręgu opisanego $R = \frac{2}{3}h$, wpisanego $r = \frac{1}{3}h$ (środki obu okręgów leżą w środku ciężkości). Promień okręgu opisanego to **nie** wysokość ani bok – to najczęstszy błąd w zadaniu 22 z 2026 r. Kąt wewnętrzny n-kąta foremnego ma miarę $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$. Sześciokąt foremny o boku a składa się z sześciu trójkątów równobocznych: dłuższa przekątna ma długość $2a$, krótsza $a\sqrt{3}$.
- **Punkty szczególne trójkąta.** Środek okręgu opisanego – punkt przecięcia symetralnych boków; w trójkącie prostokątnym to środek przeciwprostokątnej ($R = \frac{c}{2}$). Środek okręgu wpisanego – punkt przecięcia dwusiecznych kątów ($r = \frac{2P}{a+b+c}$, w trójkącie prostokątnym także $r = \frac{a+b-c}{2}$). Środek ciężkości – punkt przecięcia środkowych; dzieli każdą środkową w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka. Ortocentrum – punkt przecięcia prostych zawierających wysokości.
- **Tales i podobieństwo.** Jeśli punkty D i E leżą na bokach AC i BC oraz $DE \parallel AB$, to trójkąty CDE i CAB są podobne (cecha kkk: kąt C wspólny, kąty odpowiadające przy prostych równoległych). Skala k to stosunek $|CD|$ do **całego** boku $|CA|$, a nie do $|DA|$. Obwody figur podobnych są w stosunku k, pola – w stosunku k^2. Cechy podobieństwa: bbb, bkb, kkk; cechy przystawania: bbb, bkb, kbk – cechy przystawania „kkk” nie ma.

- **Dowód geometryczny – wzorzec zapisu.** 1) Rysunek z oznaczeniami; każdą nową literę opisz słowami (np. „*h* – wysokość trójkątów *KLM* i *KMN* poprowadzona z wierzchołka *K*”). 2) Oznacz kąty literami (α, β) i przy każdej równości podaj powód: dwusieczna, kąty naprzemianległe, wierzchołkowe, wpisane oparte na tym samym łuku, promienie tego samego okręgu. 3) Przystawanie i podobieństwo – z nazwą cechy. 4) Nie przyjmuj szczególnych przypadków (kąt prosty, trójkąt równoramienny, konkretne długości) i niczego „z rysunku”. 5) Zakończ zdaniem „To należało wykazać.” – wynik pośredni to jeszcze nie teza.

Zadanie	Punktacja CKE	Za co zero
dowód za 2 pkt (matura 2026, zad. 21)	1 pkt – jeden kluczowy związek, np. pola obu trójkątów zapisane z tą samą, opisaną wysokością ALBO uzasadnienie równości wysokości; 2 pkt – pełne rozumowanie	wysokość „*h*” bez opisu; konkretna miara kąta; sprawdzenie na przykładzie
dowód za 3 pkt (próbna 2026, zad. 21)	1 pkt – pierwszy fakt (np. trójkąt równoramienny z uzasadnieniem); 2 pkt – kluczowe długości wyrażone przez jedną zmienną; 3 pkt – pełne rozumowanie	jak wyżej; fakt przyjęty „z rysunku” – najwyżej 1 pkt
zamknięte i „wpisz” (1 pkt)	kąty w okręgu, Tales, skala podobieństwa, trójkąt równoboczny	zaokrąglenia w „wpisz” nie są akceptowane

- **Pułapki.** Promień a średnica; skala *k* a stosunek pól k^2; kąt wpisany oparty na dłuższym albo krótszym łuku; skala liczona względem części boku zamiast całego boku; „dwusieczna dzieli trójkąt na dwa trójkąty o równych polach” (nieprawda – to środkowa); odcinek na dwusiecznej wzięty za wysokość (wszystkie trzy – ze sprawozdania z matury 2026).

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. (zadanie zamknięte, 1 pkt) Punkty *A*, *B*, *C* leżą na okręgu o środku *O*, punkt *C* leży na dłuższym łuku *AB* i $|\sphericalangle ACB| = 38°$. Oblicz miarę kąta *OAB*.

Kąt środkowy *AOB* jest oparty na tym samym łuku co kąt wpisany *ACB*, więc $|\sphericalangle AOB| = 2 \cdot 38° = 76°$.

Trójkąt *AOB* jest równoramienny ($|OA| = |OB|$ – promienie), więc

$$|\sphericalangle OAB| = \frac{180° - 76°}{2} = 52°.$$

Przykład 2. (zadanie „wpisz”, 2 pkt) W okrąg o promieniu 6 wpisano trójkąt równoboczny. Oblicz długość boku tego trójkąta i promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Promień okręgu opisanego to $\frac{2}{3}$ wysokości: $6 = \frac{2}{3}h$, więc $h = 9$.

Z wzoru $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$: $a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$. Promień okręgu wpisanego: $r = \frac{1}{3}h = 3$.

Najczęstszy błąd (matura 2026, zad. 22 – 27% poprawnych): przyjęcie, że promień okręgu opisanego jest równy wysokości albo bokowi.

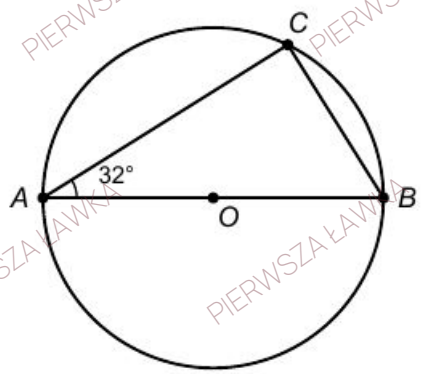
Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne – trening

Zadania krok po kroku

KARTA 2/6

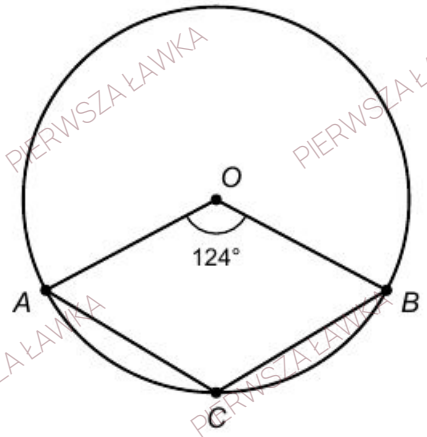
Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 12 pkt

Zadanie 1. Odcinek *AB* jest średnicą okręgu, punkt *C* leży na tym okręgu i $|\sphericalangle CAB| = 32°$ (zobacz rysunek). Kąt *ABC* ma miarę ___ / 1 pkt



A. 32° **B.** 116° **C.** 64° **D.** 58°

Zadanie 2. Punkty *A*, *B*, *C* leżą na okręgu o środku *O*, $|\sphericalangle AOB| = 124°$, a punkt *C* leży na krótszym łuku *AB* (zobacz rysunek). Kąt *ACB* ma miarę ___ / 1 pkt

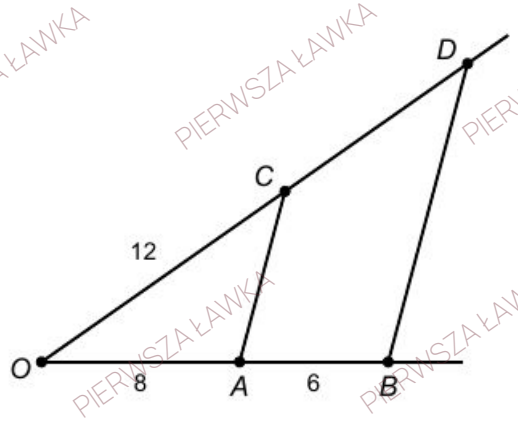


A. 124° **B.** 118° **C.** 56° **D.** 62°

Zadanie 3. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 20 i 21. Uzupełnij. ___ / 3 pkt

1. Przeciwprostokątna ma długość _____ .
2. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy _____ .
3. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy _____ .

Zadanie 4. Ramiona kąta o wierzchołku *O* przecięto prostymi równoległymi *AC* i *BD* (zobacz rysunek), przy czym |*OA*| = 8, |*AB*| = 6 i |*OC*| = 12. Odcinek *CD* ma długość ___ / 1 pkt



A. 16 **B.** 4,5 **C.** 9 **D.** 10

Zadanie 5. Boki trójkąta mają długości 4, 6 i 7. Najkrótszy bok trójkąta do niego podobnego ma długość 10. Obwód tego drugiego trójkąta jest równy ___ / 1 pkt

A. 42,5 **B.** 27 **C.** 23 **D.** 106,25

Zadanie 6. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 3 pkt

1. Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem jego przeciwprostokątnej.	**P**	**F**
2. Środek ciężkości trójkąta dzieli każdą środkową na dwie równe części.	**P**	**F**
3. Środek okręgu wpisanego w trójkąt jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów tego trójkąta.	**P**	**F**

Zadanie 7. Sześciokąt foremny jest wpisany w okrąg o promieniu 5. Oblicz pole tego sześciokąta i długość jego krótszej przekątnej. ___ / 2 pkt

PIERWSZA ŁAWKA

Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne – zadania na poziomie matury

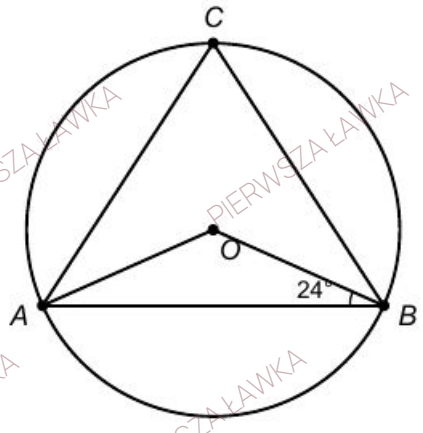
Polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE 2025–2026

KARTA 3/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 10 pkt

Zadanie 1. Punkty *A*, *B*, *C* leżą na okręgu o środku *O*, punkt *C* leży na dłuższym łuku *AB* i $|\sphericalangle OBA| = 24°$ (zobacz rysunek).
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Kąt *ACB* ma miarę

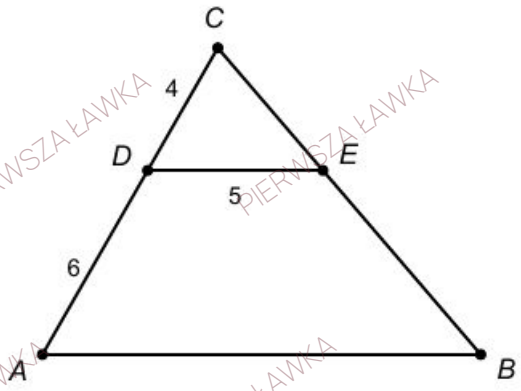
___ / 1 pkt



A. 24° **B.** 132° **C.** 114° **D.** 66°

Zadanie 2. W trójkącie *ABC* punkty *D* i *E* leżą odpowiednio na bokach *AC* i *BC*, przy czym *DE* ∥ *AB*. Ponadto $|CD| = 4$, $|DA| = 6$ i $|DE| = 5$ (zobacz rysunek).
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Odcinek *AB* ma długość

___ / 1 pkt



A. 11 **B.** 12,5 **C.** 10 **D.** 7,5

Zadanie 3. Na trójkącie równobocznym opisano okrąg o promieniu 10.
Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

___ / 2 pkt

1. Wysokość tego trójkąta jest równa _____ .
2. Pole tego trójkąta jest równe _____ .

Zadanie 4. Obwody dwóch trójkątów podobnych są równe 18 i 30. Pole mniejszego z nich jest równe 27.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Pole większego trójkąta jest równe

___ / 1 pkt

A. 75 **B.** 39 **C.** 125 **D.** 45

Zadanie 5. Sześciokąt foremny *ABCDEF* ma bok długości 6.
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

___ / 1 pkt

1. Przekątna AD ma długość 12.	**P**	**F**
2. Przekątna AC ma długość $6\sqrt{2}$.	**P**	**F**

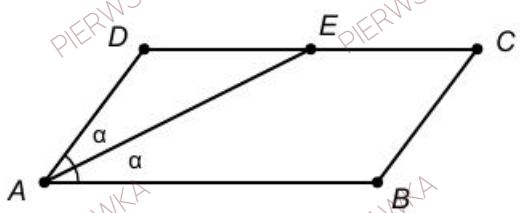
Zadanie 6. Punkt *S* jest środkiem ciężkości trójkąta równobocznego *ABC* o boku $6\sqrt{3}$.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Odległość punktu *S* od wierzchołka *A* jest równa

___ / 1 pkt

A. 9 **B.** $3\sqrt{3}$ **C.** 6 **D.** 3

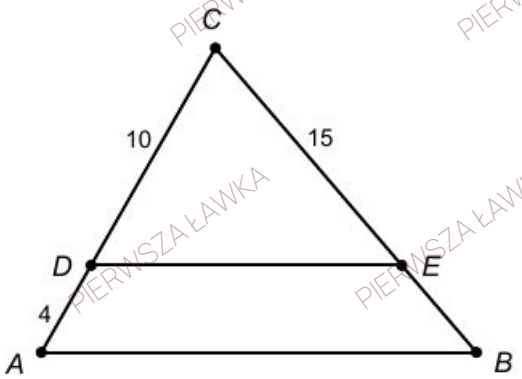
Zadanie 7. W równoległoboku *ABCD* bok *AB* jest dwa razy dłuższy od boku *AD*. Dwusieczna kąta *DAB* przecina bok *CD* w punkcie *E* (zobacz rysunek). Wykaż, że punkt *E* jest środkiem boku *CD*.

___ / 3 pkt



Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 4. W trójkącie *ABC* punkty *D* i *E* leżą odpowiednio na bokach *AC* i *BC*, przy czym *DE* ∥ *AB*. Ponadto |*CD*| = 10, |*DA*| = 4 i |*CE*| = 15 (zobacz rysunek).
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Odcinek *EB* ma długość ___ / 1 pkt



A. 5 **B.** 10 **C.** 9 **D.** 6

Zadanie 5. Sześciokąt foremny ma bok długości 10.
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Krótsza przekątna tego sześciokąta ma długość $10\sqrt{3}$.	**P**	**F**
2. Pole tego sześciokąta jest równe $100\sqrt{3}$.	**P**	**F**

Zadanie 6. Trójkąt równoboczny ma bok długości $4\sqrt{3}$.
Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe. ___ / 2 pkt

1. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy _____ .
2. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy _____ .

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Matura 2027 z matematyki (poziom podstawowy) – najczęstsze zadania: Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne (karty pracy,

Podgląd pokazał 9 z 27 stron. Pełna wersja: 27 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne – jak rozwiązywać i jak oceni to CKE – 4 zadania, 6 pkt
- Karta 2: Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne – trening – 7 zadań, 12 pkt
- Karta 3: Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne – zadania na poziomie matury – 7 zadań, 10 pkt
- Karta 4: Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne – zadania trudniejsze – 6 zadań, 13 pkt
- Karta 5: Test: Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne – grupa A – 8 zadań, 12 pkt
- Karta 6: Test: Planimetria: kąty w okręgu, podobieństwo, dowody geometryczne – grupa B – 8 zadań, 12 pkt Karta 1 pokazuje, jak CKE ocenia ten typ zadań (kamienie milowe i uwagi z z

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matura-2027-matematyka-podstawowa-najczestsze-zadania-h-planimetria-katy-w-okre