PIERWSZA ŁAWKA · NAJCZĘSTSZE ZADANIA MATURALNE · PR · MATEMATYKA · MATURA 2027 · POZIOM ROZSZERZONY

G. Geometria analityczna: okręgi, styczne, wektory

Równanie okręgu z warunków, styczne do okręgu (w punkcie, z punktu, o danym kierunku), punkty wspólne prostej i okręgu oraz dwóch okręgów, wzajemne położenie okręgów, wektory i podział odcinka, symetria względem prostej, wybór właściwego punktu z uzasadnieniem – zadanie za 5–6 pkt w każdym arkuszu rozszerzonym. Sześć kart: wzorcowe rozwiązania i zasady oceniania CKE, trening, zadania na poziomie matury, zadania trudniejsze i test w grupach A i B – z kluczem i schematami punktowania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Geometria analityczna: okręgi, styczne, wektory – jak rozwiązywać i jak oceni to CKE** Wzorcowe rozwiązania, pułapki, rozgrzewka	4 zad. 10 pkt
2	**Geometria analityczna: okręgi, styczne, wektory – trening** Zadania krok po kroku	7 zad. 18 pkt
3	**Geometria analityczna: okręgi, styczne, wektory – zadania na poziomie matury** Polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE 2025–2026	6 zad. 29 pkt
4	**Geometria analityczna: okręgi, styczne, wektory – zadania trudniejsze** Dla ambitnych – nietypowe ujęcia tego samego typu	5 zad. 20 pkt
5	**Test: Geometria analityczna: okręgi, styczne, wektory – grupa A** 60 minut · 17 pkt	5 zad. 17 pkt
6	**Test: Geometria analityczna: okręgi, styczne, wektory – grupa B** 60 minut · 17 pkt	5 zad. 17 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 pokazuje, jak CKE ocenia ten typ zadań (kamienie milowe, typowe uwagi w zasadach oceniania) oraz wzorcowe rozwiązania krok po kroku.
- Karty 2–4 prowadzą od treningu, przez zadania na poziomie matury, do zadań trudniejszych.
- Karty 5 i 6 to równoległy test (grupa A i B) z punktacją jak na maturze.
- Klucz zawiera odpowiedzi, przykładowe pełne rozwiązania i zasady oceniania w stylu CKE 2026.

- Osobny plik „Powtórka” zbiera wzory (z podziałem: są w karcie wzorów / trzeba pamiętać), typowe błędy z sprawozdań CKE i test „Sprawdź się”.

Materiał oryginalny – żadne zadanie nie jest kopią zadania CKE. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: IX.3–IX.5, IX.R1–IX.R4, IV.R; cele ogólne III.1, IV.4. Częstość na maturze: geometria analityczna – w 4 z 4 arkuszy majowych PR 2023–2026 (4 pozycje, 21 pkt: 2023 zad. 13 – 6 pkt, 2024 zad. 11, 2025 zad. 8, 2026 zad. 9 – po 5 pkt; poziom wykonania 18–42%) i w 3 z 3 arkuszy pokazowych i diagnostycznych. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

Geometria analityczna: okręgi, styczne, wektory – jak rozwiązywać i jak oceni to CKE

Wzorcowe rozwiązania, pułapki, rozgrzewka

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 10 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Gdzie w arkuszu.** Geometria analityczna jest w każdym arkuszu PR 2023–2026: jedno zadanie za 5–6 pkt (2023 – 6 pkt, 2024–2026 – po 5 pkt; razem 21 pkt, druga pozycja rankingu po zadaniu z parametrem). Poziom wykonania: 42%, 18%, 23%, 33% – zdający tracą punkty nie na trudnych pomysłach, lecz na niedokończonych układach równań, pomyleniu średnicy z promieniem i braku odrzucenia „złego" punktu. Typowe polecenia: „Oblicz współrzędne punktu…", „Wyznacz równanie okręgu…", „Rozważ wszystkie przypadki.", zawsze z dopiskiem „Zapisz obliczenia.".
- **Wzorzec zapisu (jak w zasadach oceniania CKE).** 1) Szkic w układzie współrzędnych z danymi. 2) Plan: jakie proste, okręgi i wektory są potrzebne. 3) Każdy wyznaczony obiekt nazwij: „S – środek odcinka AB", „prosta AB: $y = \ldots$". 4) Warunki geometryczne zapisz w języku współrzędnych (prostopadłość: $a_1 \cdot a_2 = -1$; styczna $\perp$ promień; punkt na okręgu – spełnia jego równanie). 5) Układy równań rozwiązuj jawnie, linia po linii. 6) Sprawdź, który punkt spełnia warunek z treści („pierwsza współrzędna dodatnia", „powyżej prostej"), a drugi **odrzuć z uzasadnieniem**. 7) Odpowiedź.
- **Bez usuniętych wzorów.** Od 2024 r. w podstawie nie ma wzoru na odległość od prostej ani postaci ogólnej równania okręgu. Najkrótszy odcinek łączący punkt P z prostą k wyznaczasz przez **rzut prostokątny**: prosta przez P prostopadła do k, potem jej punkt wspólny z k. Równania okręgów zostawiaj w postaci $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$; przy dwóch okręgach odejmij równania stronami i skorzystaj z różnicy kwadratów: $(x-a)^2 - (x-c)^2 = (c-a)(2x-a-c)$ – kwadraty się redukują i zostaje równanie prostej przechodzącej przez punkty wspólne.
- **Styczna do okręgu – trzy narzędzia.** (1) Styczna w punkcie T jest prostopadła do promienia ST (sprawdź najpierw, że T leży na okręgu). (2) Prosta i okrąg mają dokładnie jeden punkt wspólny $\Leftrightarrow$ po podstawieniu równanie kwadratowe ma $\Delta = 0$ – tak szukasz stycznych o danym kierunku albo przechodzących przez dany punkt (prostą pionową $x = x_P$ sprawdzasz osobno). (3) Punkty styczności stycznych o danym kierunku leżą na prostej przez środek okręgu prostopadłej do tego kierunku. Z punktu P poza okręgiem: $|PT|^2 = |PS|^2 - r^2$ (twierdzenie Pitagorasa w trójkącie PTS).
- **Okrąg z warunków.** Środek okręgu przechodzącego przez A i B leży na symetralnej odcinka AB. Jeżeli kąt ACB jest prosty, to C leży na okręgu o średnicy AB (kąt wpisany oparty na półokręgu) – jego środek to środek AB, a promień to **połowa** $|AB|$. Środek okręgu stycznego do obu osi układu ma współrzędne (r, r), $(-r, r)$, $(-r, -r)$ albo $(r, -r)$ – ćwiartkę wybierz z treści. Obraz okręgu w symetrii (względem osi, punktu, prostej) ma obraz środka i ten sam promień.

- **Wektory.** $\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$; równość wektorów to równość współrzędnych. Punkt P odcinka AB, dla którego $|AP| : |PB| = m : n$, spełnia $\overrightarrow{AP} = \frac{m}{m+n} \cdot \overrightarrow{AB}$. Równość typu $\overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB}$ zapisz we współrzędnych i rozwiąż dwa równania liniowe z niewiadomymi x_M, y_M. Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; środek symetrii równoległoboku to środek każdej przekątnej.

Kamień milowy (zadanie za 5–6 pkt)	Przykład zapisu
1 pkt – pierwszy związek: symetralna, prosta przez punkty wspólne okręgów, punkt zależny od jednej zmiennej, wzór wektorowy	„$S = (s, s - 3)$”, „$y = x - 5$”
2 pkt – równanie z jedną niewiadomą	„$x^2 - 8x + 12 = 0$”
3 pkt – punkty wspólne / kluczowy punkt	„$A = (2, -3)$, $B = (6, 1)$”
4 pkt – drugi obiekt (środek i promień, drugi punkt, równanie prostej)	„środek $(3, 2)$, $r = \sqrt{13}$”
5–6 pkt – wynik z wyborem właściwego rozwiązania	„$C = (6, 1)$, bo C ma mieć obie współrzędne dodatnie”

- **Uwagi w zasadach oceniania.** Nieodrzucenie drugiego, niespełniającego warunków punktu – o 1 pkt mniej (2023: 5 z 6). Prostopadłość przyjęta „z rysunku”, bez uzasadnienia – najwyżej 2 pkt (2026). Zły stosunek podziału odcinka (np. $\frac{2}{3}$ zamiast $\frac{2}{5}$ przy stosunku 2 : 3) – najwyżej 3–4 pkt. Punkt podany „z głowy” i rachunkowo sprawdzony (że spełnia warunki) – pełne punkty za tę część; bez sprawdzenia – 0. Błąd rachunkowy przy poprawnej metodzie – o 1 pkt mniej; na PR nie ma „tolerancji” błędu w ostatniej linijce.
- **Karta wzorów** (dział 11) zawiera: długość i środek odcinka, równania prostej, warunki równoległości i prostopadłości, równanie okręgu, współrzędne, długość i działania na wektorach, przesunięcie, symetrie względem osi i punktu, pole trójkąta o danych wierzchołkach, środek ciężkości. Wzór na odległość od prostej i postać ogólna okręgu w karcie z 2022 r. są, ale od 2024 r. nie ma ich w wymaganiach – każde zadanie da się rozwiązać bez nich (CKE akceptuje każde poprawne rozwiązanie).

Geometria analityczna: okręgi, styczne, wektory – trening

Zadania krok po kroku

KARTA 2/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 18 pkt

Zadanie 1. Punkty $A = (-3, 2)$ i $B = (9, -4)$ są końcami odcinka AB. Punkt P leży na odcinku AB i $|AP| : |PB| = 5 : 1$. Oblicz współrzędne punktu P. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 2. Punkt $T = (-1, -3)$ leży na okręgu $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 20$. Wyznacz równanie stycznej do tego okręgu w punkcie T. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 3. Wyznacz współrzędne punktów wspólnych okręgu $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 13$ i prostej $y = -5x + 17$. Oblicz długość cięciwy, którą okrąg wycina z tej prostej. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 4. Dane są okręgi o_1: $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ i o_2: $(x+4)^2+(y-7)^2=r^2$, gdzie $r>0$. Wyznacz wszystkie wartości r, dla których okręgi o_1 i o_2 są styczne. Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia.

___ / 3 pkt

Zadanie 5. Punkty $A=(-4,-1)$, $B=(2,-3)$ i $C=(5,3)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz współrzędne wierzchołka D i środka symetrii tego równoległoboku. Rozstrzygnij, czy $ABCD$ jest rombem. Zapisz obliczenia.

___ / 3 pkt

Zadanie 6. Okrąg jest styczny do obu osi układu współrzędnych i przechodzi przez punkt $P=(4,2)$. Wyznacz równanie tego okręgu. Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia.

___ / 3 pkt

Zadanie 7. Wyznacz równanie obrazu okręgu $(x+1)^2+(y-6)^2=5$ w symetrii względem prostej $y=x+3$. Zapisz obliczenia.

___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Geometria analityczna: okręgi, styczne, wektory – zadania na poziomie matury

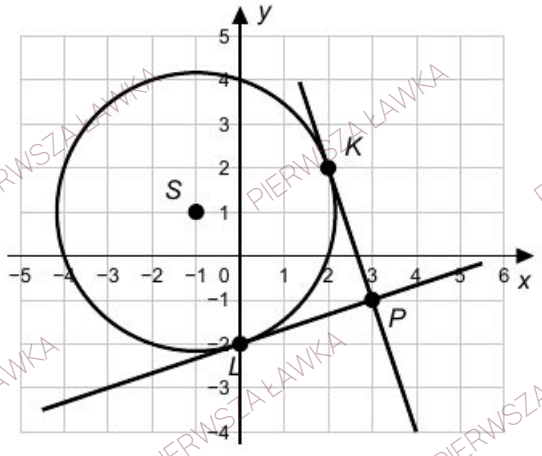
Polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE 2025–2026

KARTA 3/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 29 pkt

Zadanie 1. Okręgi o_1: $(x-1)^2+(y+1)^2=26$ i o_2: $(x-7)^2+(y-8)^2=65$ przecinają się w punktach A i B. Wyznacz równanie okręgu o średnicy AB. Zapisz obliczenia. ___ / 5 pkt

Zadanie 2. Z punktu $P=(3,-1)$ poprowadzono dwie styczne do okręgu o: $(x+1)^2+(y-1)^2=10$ (zobacz rysunek). Punkty styczności oznaczono K i L. Wyznacz równania obu stycznych i oblicz pole trójkąta PKL. Zapisz obliczenia. ___ / 6 pkt



Geometria analityczna: okręgi, styczne, wektory – zadania trudniejsze

Dla ambitnych – nietypowe ujęcia tego samego typu

KARTA 4/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 20 pkt

Zadanie 1. Okrąg o promieniu $2\sqrt{5}$ przechodzi przez punkty $A = (-3, 0)$ i $B = (3, -2)$. Wyznacz równanie tego okręgu. Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia. ___ / 4 pkt

Zadanie 2. Dane są okręgi o_1: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$ i o_2: $(x - 3m - 2)^2 + (y - 4m + 3)^2 = 4$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których okręgi o_1 i o_2 mają dokładnie dwa punkty wspólne. Zapisz obliczenia. ___ / 4 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Test: Geometria analityczna: okręgi, styczne, wektory – grupa A

60 minut · 17 pkt

KARTA 5/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 17 pkt

Zadanie 1. Punkty $A = (1, -4)$ i $B = (7, 5)$ są końcami odcinka AB. Punkt P leży na odcinku AB i $|AP| : |PB| = 1 : 2$. Oblicz współrzędne punktu P. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 2. Punkt $T = (5, 3)$ leży na okręgu $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 17$. Styczna do tego okręgu w punkcie T przecina oś Ox w punkcie K. Oblicz współrzędne punktu K. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 3. Dane są okręgi o_1: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$ i o_2: $(x - 3)^2 + (y - 13)^2 = r^2$, gdzie $r > 0$. Wyznacz wszystkie wartości r, dla których te okręgi są styczne. Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Test: Geometria analityczna: okręgi, styczne, wektory – grupa B

60 minut · 17 pkt

KARTA 6/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 17 pkt

Zadanie 1. Punkty $A = (-5, 2)$ i $B = (3, -10)$ są końcami odcinka AB. Punkt P leży na odcinku AB i $|AP| : |PB| = 3 : 1$. Oblicz współrzędne punktu P. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 2. Punkt $T = (-1, 5)$ leży na okręgu $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$. Styczna do tego okręgu w punkcie T przecina oś Ox w punkcie K. Oblicz współrzędne punktu K. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 3. Dane są okręgi o_1: $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$ i o_2: $(x + 11)^2 + (y - 2)^2 = r^2$, gdzie $r > 0$. Wyznacz wszystkie wartości r, dla których te okręgi są styczne. Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Matura 2027 z matematyki (poziom rozszerzony) – najczęstsze zadania: Geometria analityczna: okręgi, styczne, wektory (karty pracy, test A i B,...

Podgląd pokazał 10 z 35 stron. Pełna wersja: 35 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Geometria analityczna: okręgi, styczne, wektory – jak rozwiązywać i jak oceni to CKE – 4 zadania, 10 pkt
- Karta 2: Geometria analityczna: okręgi, styczne, wektory – trening – 7 zadań, 18 pkt
- Karta 3: Geometria analityczna: okręgi, styczne, wektory – zadania na poziomie matury – 6 zadań, 29 pkt
- Karta 4: Geometria analityczna: okręgi, styczne, wektory – zadania trudniejsze – 5 zadań, 20 pkt
- Karta 5: Test: Geometria analityczna: okręgi, styczne, wektory – grupa A – 5 zadań, 17 pkt
- Karta 6: Test: Geometria analityczna: okręgi, styczne, wektory – grupa B – 5 zadań, 17 pkt Karta 1 pokazuje, jak CKE ocenia ten typ zadań (kamienie milowe i uwagi z zasad oceniania

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matura-2027-matematyka-rozszerzona-najczestsze-zadania-g-geometria-analityczna-o