PIERWSZA ŁAWKA · 40 ZADAŃ Z JEDNEGO TEMATU · PR · MATEMATYKA · MATURA 2027 · POZIOM ROZSZERZONY

Trygonometria: tożsamości, funkcje i równania trygonometryczne – 40 zadań

Miara łukowa, funkcje dowolnego kąta i wzory redukcyjne, wykresy i okresowość, wzory na sumy, różnice i kąt podwojony, dowody tożsamości oraz równania trygonometryczne w przedziale i w zbiorze liczb rzeczywistych. 40 zadań otwartych w formule matury rozszerzonej 2027 (2–6 pkt, razem 133 pkt).

Karta	Temat	Zadania
1	**Ściąga: Trygonometria: tożsamości, funkcje i równania trygonometryczne. Miara łukowa, funkcje dowolnego kąta, redukcja** 7 krótkich zadań po 2 pkt: radiany, wycinek koła, wartości funkcji, wzory redukcyjne, okresowość.	7 zad. 14 pkt
2	**Wykresy, okresowość, zbiór wartości** Okres i zbiór wartości funkcji, przekształcenia wykresów, parametr i liczba rozwiązań, dziedzina tangensa, pierwszy dowód.	7 zad. 17 pkt
3	**Sumy, różnice i kąt podwojony** Wartości dokładne, tożsamości i dowody z karty wzorów.	7 zad. 23 pkt
4	**Równania trygonometryczne w przedziale** Równania elementarne, kwadratowe, iloczynowe i jednorodne; pilnuj dziedziny, okresu i krańców przedziału.	7 zad. 24 pkt
5	**Równania trudniejsze i parametr** Równania ze wzorami na sumy, podstawienie $\sin x + \cos x = t$, równanie z parametrem, serie, które się pokrywają.	6 zad. 28 pkt
6	**Dowody i zadania złożone** Tożsamości, dowody w trójkącie, wzór funkcji i równanie, trójkąt z twierdzeniem sinusów.	6 zad. 27 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Klucz na końcu: odpowiedzi, zasady oceniania etapami jak w CKE, pełne rozwiązania.

Zadania oryginalne. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: VII.R1, VII.R2, VII.R3, VII.R4, VII.R5, VII.R6, VII.R7, VII.R8 (+ VII.2). Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

Ściąga: Trygonometria: tożsamości, funkcje i równania trygonometryczne. Miara łukowa, funkcje dowolnego kąta, redukcja

7 krótkich zadań po 2 pkt: radiany, wycinek koła, wartości funkcji, wzory redukcyjne, okresowość.

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 14 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Miara łukowa.** $180° = \pi$ rad; α rad $= \alpha \cdot \frac{180°}{\pi}$, $x° = x \cdot \frac{\pi}{180}$ rad. Łuk koła: $l = \alpha r$, pole wycinka: $P = \frac{1}{2}\alpha r^2$ (kąt w radianach). Zapamiętaj: $30° = \frac{\pi}{6}$, $45° = \frac{\pi}{4}$, $60° = \frac{\pi}{3}$, $90° = \frac{\pi}{2}$.
- **Funkcje dowolnego kąta.** Punkt $P = (x, y) \neq (0, 0)$ na końcowym ramieniu kąta α, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$: $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$. Znaki: I ćwiartka wszystkie dodatnie; II tylko sin; III tylko tg; IV tylko cos. Przy $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ wyznaczonych z jedynki **zawsze** sprawdź ćwiartkę.
- **Okresowość i redukcja.** Okres sin i cos to 2π, okres tg to π; $y = \sin(kx + b)$ ma okres $\frac{2\pi}{|k|}$, $y = \operatorname{tg}(kx + b)$ – $\frac{\pi}{|k|}$. Redukcja (w karcie wzorów): $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$.
- **Wykresy.** Zbiór wartości $y = a\sin(kx + b) + d$ to $\langle d - |a|, d + |a|\rangle$. Dziedzina tg u: $u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Miejsca zerowe sin u: $u = k\pi$; cos u: $u = \frac{\pi}{2} + k\pi$; tg u: $u = k\pi$. Liczbę rozwiązań równania $\sin x = c$ lub $\cos x = c$ na przedziale czytaj z wykresu (uwaga na krańce przedziału).
- **Sumy, różnice, kąt podwojony** (są w karcie wzorów): $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$; $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ i $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$; $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$; $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$; $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$. Sumy i różnice: $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$, $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$ (też w karcie).
- **Równania elementarne** ($k \in \mathbb{Z}$, $|c| \leq 1$): $\sin x = \sin u \Leftrightarrow x = u + 2k\pi$ lub $x = \pi - u + 2k\pi$; $\cos x = \cos u \Leftrightarrow x = u + 2k\pi$ lub $x = -u + 2k\pi$; $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} u \Leftrightarrow x = u + k\pi$. Przy argumencie $kx + b$ zapisz serię dla argumentu, potem wyznacz x (dziel też $2k\pi$). W karcie wzorów serii rozwiązań **nie ma**.
- **Metody.** (1) Wszystko na jedną stronę i **rozkład na czynniki** – nie dziel przez wyrażenie z niewiadomą bez założenia, że jest różne od zera. (2) Podstawienie $t = \sin x$ (lub $\cos x$) z warunkiem $t \in \langle -1, 1\rangle$. (3) Równanie jednorodne ($\sin^2 x$, $\sin x\cos x$, $\cos^2 x$) – uzasadnij $\cos x \neq 0$, podziel przez $\cos^2 x$. (4) $a\sin x + b\cos x = c$ – zapisz lewą stronę jako $\sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \alpha)$. (5) $\sin x + \cos x = t$ daje $\sin 2x = t^2 - 1$, $|t| \leq \sqrt{2}$.
- **Zapis i ocena CKE.** Wypisz rozwiązania w przedziale *rosnąco*, sprawdź oba krańce i usuń powtórzenia (serie mogą się pokrywać). Dowód („Wykaż, że…") prowadź dla dowolnego kąta ze wskazaniem dziedziny; sprawdzenie dla wybranych wartości to 0 punktów.

Podgląd • Pierwsza Ławka

Wykresy, okresowość, zbiór wartości

Okres i zbiór wartości funkcji, przekształcenia wykresów, parametr i liczba rozwiązań, dziedzina tangensa, pierwszy dowód.

KARTA 2/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 17 pkt

Zadanie 1. Wyznacz najmniejszy okres funkcji $f(x) = 3\cos(3x - \frac{\pi}{4}) + 1$ oraz funkcji $g(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{3}$. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 2. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = 6\sin x\cos x - 2$ określonej dla każdej liczby rzeczywistej x. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 3. Wykres funkcji $y = \sin x$ przesunięto o $\frac{\pi}{3}$ jednostek w lewo, a następnie otrzymany wykres odbito symetrycznie względem osi Ox. W ten sposób otrzymano wykres funkcji g. Zapisz wzór funkcji g i wyznacz jej miejsca zerowe w przedziale $\langle 0, 2\pi)$. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 4. Wykaż, że funkcja $f(x) = \sin x\cos 2x$, określona dla każdej liczby rzeczywistej x, jest nieparzysta oraz dla każdej liczby rzeczywistej x spełnia warunek $f(x + \pi) = -f(x)$. ___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Równania trudniejsze i parametr

KARTA 5/6

Równania ze wzorami na sumy, podstawienie $\sin x + \cos x = t$, równanie z parametrem, serie, które się pokrywają.

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 28 pkt

Zadanie 1. Rozwiąż równanie $\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$. Zapisz obliczenia. ___ / 4 pkt

Zadanie 2. Rozwiąż równanie $\cos 2x - 7\sin x = 4$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$. Zapisz obliczenia. ___ / 4 pkt

Zadanie 3. Rozwiąż równanie $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$. Zapisz obliczenia. ___ / 5 pkt

Zadanie 4. Dane jest równanie $2\sin^2 x - (m+2)\sin x + m = 0$ z parametrem m. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których to równanie ma w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ dokładnie trzy rozwiązania. Zapisz obliczenia. ___ / 5 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Matura 2027 matematyka PR – Trygonometria: tożsamości, funkcje i równania trygonometryczne – 40 zadań z kluczem i zasadami oceniania

Podgląd pokazał 4 z 31 stron. Pełna wersja: 31 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- 40 nowych zadań otwartych z matematyki na maturę rozszerzoną 2027 z jednego tematu: trygonometria: tożsamości, funkcje i równania trygonometryczne – Miara łukowa, funkcje dowolnego
- Na początku ściąga: najważniejsze wzory i twierdzenia z tematu (z zaznaczeniem, co jest w karcie wzorów CKE) i wzorcowe rozwiązanie zapisane tak, jak oczekują egzaminatorzy.
- Zadania w sześciu sekcjach – od krótkich za 2–3 pkt do wieloetapowych za 5–6 pkt (razem 133 pkt), w tym zadania „Wykaż, że…”.
- Polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE 2025–2026.
- Na końcu klucz: odpowiedzi, zasady oceniania etapami (za co kolejne punkty, uwagi w stylu CKE) i przykładowe pełne rozwiązania.
- 31 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.
- Wszystkie zadania są oryginalne – nie powtarzają zadań CKE ani naszych arkuszy próbnych, zestawów i „najczęstszych zadań maturalnych”.
- Wymagania: VII.R1, VII.R2, VII.R3, VII.R4, VII.R5, VII.R6, VII.R7, VII.R8 (+ VII.2).
- Materiał przygotowany zgodnie z podstawą programową matematyki dla liceum i technikum (Dz.U.
- 2018 poz.
- 467 w brzmieniu Dz.U.
- 2024 poz.
- 1019), zakres rozszerzony – obowiązującą na maturze w latach 2027–2030.

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matura-2027-matematyka-rozszerzona-trygonometria-rownania-trygonometryczne-40-z