PIERWSZA ŁAWKA · NAJCZĘSTSZE ZADANIA MATURALNE · PR · MATEMATYKA · MATURA 2027 · POZIOM ROZSZERZONY

C. Dowody algebraiczne (nierówności, logarytmy, podzielność)

Dowody nierówności dla liczb dodatnich i rzeczywistych (rozkład do postaci z kwadratem różnicy, $(a + b)(a - b)^2 \geq 0$, suma kwadratów, warunek $a + b = s$), tożsamości i wyrażenia z logarytmami (zamiana podstawy, logarytm wyrażony przez dane logarytmy), podzielność z wzorem na $a^n - b^n$, iloczynem kolejnych liczb i resztami; zapis dowodu i zasady oceniania CKE. Sześć kart: wzorcowe rozwiązania i zasady oceniania CKE, trening, zadania na poziomie matury, zadania trudniejsze i test w grupach A i B – z kluczem i schematami punktowania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Dowody algebraiczne (nierówności, logarytmy, podzielność) – jak rozwiązywać i jak oceni to CKE** Wzorcowe rozwiązania, pułapki, rozgrzewka	4 zad. 10 pkt
2	**Dowody algebraiczne (nierówności, logarytmy, podzielność) – trening** Zadania krok po kroku	7 zad. 16 pkt
3	**Dowody algebraiczne (nierówności, logarytmy, podzielność) – zadania na poziomie matury** Polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE 2025–2026	6 zad. 16 pkt
4	**Dowody algebraiczne (nierówności, logarytmy, podzielność) – zadania trudniejsze** Dla ambitnych – nietypowe ujęcia tego samego typu	5 zad. 15 pkt
5	**Test: Dowody algebraiczne (nierówności, logarytmy, podzielność) – grupa A** 55 minut · 16 pkt	6 zad. 16 pkt
6	**Test: Dowody algebraiczne (nierówności, logarytmy, podzielność) – grupa B** 55 minut · 16 pkt	6 zad. 16 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 pokazuje, jak CKE ocenia ten typ zadań (kamienie milowe, typowe uwagi w zasadach oceniania) oraz wzorcowe rozwiązania krok po kroku.
- Karty 2–4 prowadzą od treningu, przez zadania na poziomie matury, do zadań trudniejszych.
- Karty 5 i 6 to równoległy test (grupa A i B) z punktacją jak na maturze.
- Klucz zawiera odpowiedzi, przykładowe pełne rozwiązania i zasady oceniania w stylu CKE 2026.
- Osobny plik „Powtórka" zbiera wzory (z podziałem: są w karcie wzorów / trzeba pamiętać), typowe błędy z sprawozdań CKE i test „Sprawdź się".

Materiał oryginalny – żadne zadanie nie jest kopią zadania CKE. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: I.2, I.9, I (ZR – zamiana podstawy logarytmu), II.1, II.R5 (+ II.R1–R2); cele ogólne IV.1, IV.3. Częstość na maturze: dowód nierówności algebraicznej – 11. miejsce w rankingu PR: w 3 z 4 arkuszy majowych 2023–2026 (2023 zad. 4, 2025 zad. 2, 2026 zad. 3; 3 pozycje, 9 pkt) i w 2 z 3 diagnostycznych; w 2024 r. zamiast niego dowód z logarytmami (zad. 5, 3 pkt); logarytmy „wykaż" także 2023 zad. 12 (część pierwsza) i w arkuszach III 2022, XII 2022, XII 2024. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

Dowody algebraiczne (nierówności, logarytmy, podzielność) – jak rozwiązywać i jak oceni to CKE

Wzorcowe rozwiązania, pułapki, rozgrzewka

KARTA 1/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 10 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Gdzie w arkuszu.** Dowód algebraiczny za 3 pkt jest w arkuszu PR co roku: nierówność 3. stopnia przy warunku $x + y = \text{const}$ (2023 zad. 4 – 67%), logarytm wyrażony przez dwa dane logarytmy (2024 zad. 5 – 62%), nierówność dla liczb dodatnich z sześcianem sumy (2025 zad. 2 – 35%), nierówność z sumą sześcianów (2026 zad. 3 – 44%). Do tego „wykaż, że wyrażenie z logarytmami można przekształcić do postaci…" (2023 zad. 12.1) i podzielność sumy sześcianów (arkusz pokazowy 2022).
- **Dowód nierówności – wzorzec.** 1) Przenieś wszystko na jedną stronę. 2) Jeśli są ułamki, pomnóż przez wspólny mianownik i **napisz**, że jest dodatni (np. „$a^2b^2 > 0$, bo $a, b > 0$"). 3) Rozłóż na czynniki: najczęściej $(a - b)^2$ albo $(a + b)(a - b)^2$ – przyda się $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. 4) Zdanie zamykające o znaku **każdego** czynnika: „kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny, a suma liczb dodatnich jest dodatnia". 5) „To należało wykazać."

Punkty (ZO-PR 2026, zad. 3)	Za co
1 pkt	sprowadzenie nierówności do postaci $W(a, b) \geq 0$ (wielomian) albo rozkład sumy sześcianów
2 pkt	postać z kwadratem różnicy, np. $(a + b)(a - b)^2 \geq 0$, bez komentarza
3 pkt	ta postać i uzasadnienie znaków obu czynników
0 pkt	sprawdzenie nierówności tylko dla wybranych liczb
2 pkt zamiast 3	dwa przypadki $a > b$ i $a < b$ z pominięciem $a = b$

- **Logarytmy.** Zamiana podstawy (jest w karcie wzorów): $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, w szczególności $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$. Plan dowodu „wyraź przez a i b": 1) sprowadź wszystkie logarytmy do jednej podstawy – tej, w której dane są a i b; 2) rozłóż liczby na czynniki pierwsze ($24 = 2^3 \cdot 3$); 3) zastosuj logarytm iloczynu i potęgi. Przy $a^{\log_a x} = x$ pamiętaj o założeniu $x > 0$.
- **Podzielność na PR.** $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$ (wzór w karcie), więc dla liczb całkowitych a, b liczba $a^n - b^n$ jest podzielna przez $a - b$. Iloczyn k kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez k (dwóch – przez 2, trzech – przez 6). Przy resztach wprowadzaj zmienną z opisem: „$n = 5k + 2$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$" i rozpatrz **wszystkie** przypadki.
- **Jak nie tracić punktów.** Sprawdzenie tezy na przykładach – 0 pkt (każdy rok, PP i PR). Nie wychodź od tezy zakończonej prawdą bez znaków równoważności ($\Leftrightarrow$) – przekształcaj równoważnie albo zacznij od prawdziwej nierówności. Na PR można też użyć funkcji pomocniczej i pochodnej (ZO 2025–2026 przewidywały taki sposób). Błędy we wzorach skróconego mnożenia to najczęstsza przyczyna utraty punktów (sprawozdanie 2025).

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Matura 2027 z matematyki (poziom rozszerzony) – najczęstsze zadania: Dowody algebraiczne (nierówności, logarytmy, podzielność) (karty pracy,

Podgląd pokazał 2 z 24 stron. Pełna wersja: 24 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Dowody algebraiczne (nierówności, logarytmy, podzielność) – jak rozwiązywać i jak oceni to CKE – 4 zadania, 10 pkt
- Karta 2: Dowody algebraiczne (nierówności, logarytmy, podzielność) – trening – 7 zadań, 16 pkt
- Karta 3: Dowody algebraiczne (nierówności, logarytmy, podzielność) – zadania na poziomie matury – 6 zadań, 16 pkt
- Karta 4: Dowody algebraiczne (nierówności, logarytmy, podzielność) – zadania trudniejsze – 5 zadań, 15 pkt
- Karta 5: Test: Dowody algebraiczne (nierówności, logarytmy, podzielność) – grupa A – 6 zadań, 16 pkt
- Karta 6: Test: Dowody algebraiczne (nierówności, logarytmy, podzielność) – grupa B – 6 zadań, 16 pkt Karta 1 pokazuje, jak CKE ocenia ten typ zadań (kamienie milowe i uwagi z zasad

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matura-2027-matematyka-rozszerzona-najczestsze-zadania-c-dowody-algebraiczne-ni