PIERWSZA ŁAWKA · ZESTAW DZIAŁOWY · MATEMATYKA · KLASA 1 LO I TECHNIKUM · ZAKRES PODSTAWOWY

# Dział 8. Planimetria: trójkąty, twierdzenie Talesa, podobieństwo

Nierówność trójkąta, związek między kątami i bokami, rozpoznawanie trójkątów ostrokątnych, prostokątnych i rozwartokątnych (twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa), twierdzenie Talesa, cechy podobieństwa trójkątów, obwody i pola figur podobnych, skala mapy, proste dowody geometryczne z podobieństwem. Dziewięć kart: teoria z przykładami, ćwiczenia, zadania typu maturalnego, dwie kartkówki (A i B) i sprawdzian (A i B) – z kluczem i zasadami oceniania.

| Karta | Temat | Zadania |
|---|---|---|
| 1 | **Planimetria: trójkąty, twierdzenie Talesa, podobieństwo – najważniejsze wiadomości**<br>Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka | 4 zad.<br>8 pkt |
| 2 | **Planimetria: trójkąty, twierdzenie Talesa, podobieństwo – ćwiczenia**<br>Ćwiczę umiejętności z działu | 8 zad.<br>18 pkt |
| 3 | **Planimetria: trójkąty, twierdzenie Talesa, podobieństwo – zadania typu maturalnego**<br>Polecenia i punktacja jak na maturze 2027 | 7 zad.<br>10 pkt |
| 4 | **Kartkówka 1: rodzaje trójkątów i twierdzenie Talesa – grupa A**<br>15 minut · 9 pkt | 4 zad.<br>9 pkt |
| 5 | **Kartkówka 1: rodzaje trójkątów i twierdzenie Talesa – grupa B**<br>15 minut · 9 pkt | 4 zad.<br>9 pkt |
| 6 | **Kartkówka 2: podobieństwo trójkątów, obwody i pola figur podobnych – grupa A**<br>15 minut · 8 pkt | 4 zad.<br>8 pkt |
| 7 | **Kartkówka 2: podobieństwo trójkątów, obwody i pola figur podobnych – grupa B**<br>15 minut · 8 pkt | 4 zad.<br>8 pkt |
| 8 | **Sprawdzian: Planimetria: trójkąty, twierdzenie Talesa, podobieństwo – grupa A**<br>45 minut · 20 pkt | 10 zad.<br>20 pkt |

| | | |
|---|---|---|
| 9 | **Sprawdzian: Planimetria: trójkąty, twierdzenie Talesa, podobieństwo – grupa B**<br>45 minut · 20 pkt | 10 zad.<br>20 pkt |

**JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU**

- Karta 1 przypomina najważniejsze wiadomości z działu i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku – od niej warto zacząć.
- Karta 2 to ćwiczenia, a karta 3 – zadania w formule matury 2027 (polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE).
- Karty 4–7 to dwie kartkówki (po 15 minut), każda w grupach A i B. Karty 8–9 to sprawdzian (45 minut) w grupach A i B – te same typy zadań i ta sama punktacja, inne liczby.
- Klucz na końcu zestawu zawiera odpowiedzi, przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE (kamienie milowe, błąd rachunkowy = −1 pkt).
- Osobny plik „Powtórka" zbiera definicje, wzory (z zaznaczeniem, które są w karcie wzorów CKE), typowe błędy i test „Sprawdź się".

Materiał oryginalny. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: VIII.2, VIII.7, VIII.8, VIII.9, VIII.11; cele ogólne III.2, IV.1, IV.3; dowody PP pkt 7 i 10; twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa (VIII.R2) – tylko informacja. Miejsce w seriach podręczników: NE kl. 1 · Pazdro kl. 1 · GWO kl. 3; technikum NE kl. 2. Nazwy wydawnictw i serii podano tylko informacyjnie – materiał nie jest z nimi powiązany. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

PIERWSZA ŁAWKA

# Planimetria: trójkąty, twierdzenie Talesa, podobieństwo – najważniejsze wiadomości

Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka

KARTA 1/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

**PRZYPOMNIJ SOBIE**

- **Nierówność trójkąta.** Z odcinków $a$, $b$, $c$ można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z nich jest krótszy od sumy dwóch pozostałych. Wystarczy sprawdzić najdłuższy: $c < a + b$.
- **Kąty i boki.** W trójkącie naprzeciw większego kąta leży dłuższy bok, a naprzeciw dłuższego boku – większy kąt. Najdłuższy bok leży więc naprzeciw największego kąta, a najkrótszy – naprzeciw najmniejszego.
- **Rodzaj trójkąta po długościach boków.** Niech $c$ będzie najdłuższym bokiem. Jeżeli $c^2 < a^2 + b^2$, trójkąt jest ostrokątny; jeżeli $c^2 = a^2 + b^2$ – prostokątny (twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa); jeżeli $c^2 > a^2 + b^2$ – rozwartokątny. Uzasadnienie daje twierdzenie cosinusów, które poznasz w klasie 2.
- **Twierdzenie Talesa.** Ramiona kąta o wierzchołku $O$ przecinamy dwiema prostymi równoległymi $AC \parallel BD$ ($A$, $B$ na jednym ramieniu, $C$, $D$ na drugim). Wtedy $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|}$ oraz $\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OC|}{|CD|}$. Wniosek: trójkąty $OAC$ i $OBD$ są podobne, więc $\frac{|AC|}{|BD|} = \frac{|OA|}{|OB|}$. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa obowiązuje tylko w zakresie rozszerzonym.
- **Cechy podobieństwa trójkątów:** bbb – trzy pary boków proporcjonalnych; bkb – dwie pary boków proporcjonalnych i równe kąty między nimi; kkk – kąty odpowiednio równe (wystarczą dwie pary kątów). Zapis $\triangle ABC \sim \triangle KLM$ pokazuje, które wierzchołki sobie odpowiadają.
- **Skala podobieństwa** $k$ to stosunek długości odpowiednich odcinków figury podobnej do figury wyjściowej. Stosunek obwodów figur podobnych jest równy $k$, a stosunek pól – $k^2$ (objętości brył podobnych – $k^3$, klasa 4).
- **Dowód z podobieństwem:** 1) wskaż dwa trójkąty, 2) uzasadnij równość kątów (wspólny kąt, kąty wierzchołkowe, kąty naprzemianległe lub odpowiadające przy prostych równoległych) albo proporcjonalność boków, 3) nazwij cechę, 4) zapisz proporcję, 5) przekształć ją do tezy. Rysunek i przykład liczbowy nie są dowodem.
- W „Wybranych wzorach matematycznych” CKE są: twierdzenie Pitagorasa z twierdzeniem odwrotnym, twierdzenie Talesa, cechy podobieństwa trójkątów i wzór $\frac{P_2}{P_1} = k^2$. Nie ma tam kryterium rodzaju trójkąta ani związku między kątem a przeciwległym bokiem.

**PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM**

**Przykład 1. Czy trójkąt o bokach 6, 7 i 9 jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny? Naprzeciw którego boku leży największy kąt?**

Trójkąt istnieje, bo $9 < 6 + 7$. Najdłuższy bok ma długość 9: $9^2 = 81$, a $6^2 + 7^2 = 36 + 49 = 85$.

Ponieważ $81 < 85$, trójkąt jest ostrokątny. Największy kąt leży naprzeciw najdłuższego boku, czyli boku długości 9.

**Przykład 2. Ramiona kąta o wierzchołku *O* przecięto prostymi równoległymi *AC* i *BD*. Punkty *A* i *B* leżą na jednym ramieniu (*A* między *O* i *B*), a *C* i *D* – na drugim. $|OA| = 4$, $|AB| = 6$, $|OC| = 5$, $|AC| = 6$. Oblicz $|CD|$ i $|BD|$.**

Z twierdzenia Talesa: $\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OC|}{|CD|}$, czyli $\frac{4}{6} = \frac{5}{|CD|}$, więc $|CD| = 7{,}5$.

Trójkąty *OAC* i *OBD* są podobne: $\frac{|AC|}{|BD|} = \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{4}{10}$, więc $|BD| = 6 \cdot \frac{10}{4} = 15$.

**Przykład 3. Trójkąty *ABC* i *KLM* są podobne. Bok *AB* ma długość 4, a odpowiadający mu bok *KL* – długość 10. Obwód trójkąta *ABC* jest równy 15, a jego pole – 12. Oblicz obwód i pole trójkąta *KLM*.**

Skala: $k = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$.

Obwód: $15 \cdot \frac{5}{2} = 37{,}5$.

Pole: $12 \cdot (\frac{5}{2})^2 = 12 \cdot \frac{25}{4} = 75$.

**Przykład 4. W trapezie *ABCD* ($AB \parallel CD$) przekątne przecinają się w punkcie *S*. Wykaż, że $\frac{|AS|}{|SC|} = \frac{|AB|}{|CD|}$. Oblicz $|AS|$, gdy $|AB| = 12$, $|CD| = 4$ i $|AC| = 10$.**

Trójkąty *ABS* i *CDS*: $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle CSD|$ (kąty wierzchołkowe), $|\sphericalangle BAS| = |\sphericalangle DCS|$ (kąty naprzemianległe, bo $AB \parallel CD$). Z cechy kkk $\triangle ABS \sim \triangle CDS$, więc $\frac{|AS|}{|CS|} = \frac{|AB|}{|CD|}$. To należało wykazać.

Liczby: $\frac{|AS|}{|SC|} = \frac{12}{4} = 3$ i $|AS| + |SC| = 10$, więc $4|SC| = 10$, $|SC| = 2{,}5$, $|AS| = 7{,}5$.

**ZADANIA**

**Zadanie 1. Określ rodzaj trójkąta o podanych długościach boków (ostrokątny, prostokątny, rozwartokątny).** ___ / 3 pkt

1. 8, 15, 17: _____
2. 4, 5, 7: _____
3. 5, 6, 7: _____

**Zadanie 2. Trójkąty $T_1$ i $T_2$ są podobne, a skala podobieństwa trójkąta $T_2$ do $T_1$ jest równa 3. Pole trójkąta $T_1$ jest równe 5. Pole trójkąta $T_2$ jest równe** ___ / 1 pkt

**A.** 135 **B.** 15 **C.** 30 **D.** 45

Podgląd • Pierwsza Ławka

# Planimetria: trójkąty, twierdzenie Talesa, podobieństwo – ćwiczenia

KARTA 2/9

Ćwiczę umiejętności z działu

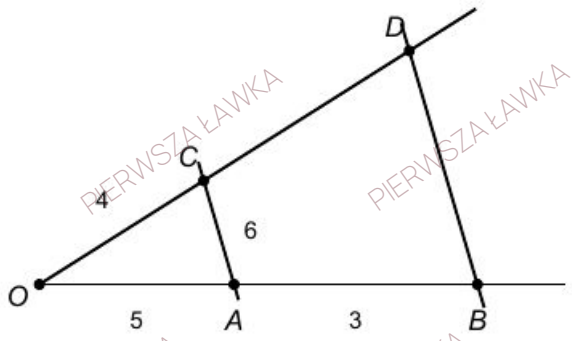
Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 18 pkt

**Zadanie 1. Określ, czy trójkąt o podanych długościach boków istnieje. Jeśli istnieje, określ, czy jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny.** ___ / 4 pkt

1. 9, 12, 15: _____
2. 6, 8, 11: _____
3. 7, 8, 9: _____
4. 3, 4, 8: _____

**Zadanie 2. W trójkącie *ABC* kąt przy wierzchołku *A* ma miarę 50°, a kąt przy wierzchołku *B* – 75°. Uporządkuj boki trójkąta od najkrótszego do najdłuższego. Uzasadnij odpowiedź.** ___ / 2 pkt

**Zadanie 3. Proste *AC* i *BD* są równoległe (zobacz rysunek). |*OA*| = 5, |*AB*| = 3, |*OC*| = 4, |*AC*| = 6. Oblicz |*CD*| i |*BD*|.** ___ / 2 pkt




**Zadanie 4. Trójkąt o bokach 6, 8, 10 jest podobny do trójkąta o bokach** ___ / 1 pkt

**A.** 9, 12, 15 **B.** 6, 9, 12 **C.** 3, 4, 6 **D.** 8, 10, 12

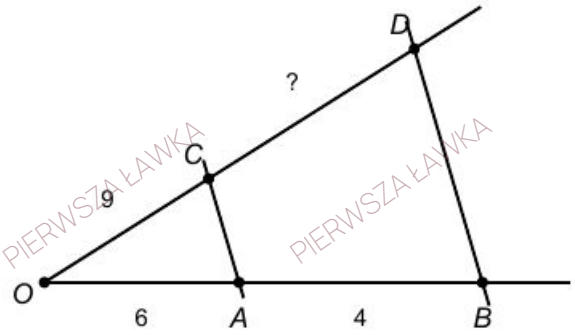
# Planimetria: trójkąty, twierdzenie Talesa, podobieństwo – zadania typu maturalnego

Polecenia i punktacja jak na maturze 2027

KARTA 3/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 10 pkt

**Zadanie 1. Proste *AC* i *BD* są równoległe (zobacz rysunek). |*OA*| = 6, |*AB*| = 4, |*OC*| = 9.**
**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**
**Długość odcinka *CD* jest równa** ___ / 1 pkt




**A.** $\frac{8}{3}$ **B.** 6 **C.** 5 **D.** 15

**Zadanie 2. Trójkąty *ABC* i *DEF* są podobne. Obwód trójkąta *ABC* jest równy 18, obwód trójkąta *DEF* jest równy 45, a pole trójkąta *ABC* jest równe 12.**
**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**
**Pole trójkąta *DEF* jest równe** ___ / 1 pkt

**A.** 75 **B.** 30 **C.** 48 **D.** 187,5

**Zadanie 3. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**
**Trójkąt o bokach długości 8, 10 i 13 jest** ___ / 1 pkt

**A.** nie istnieje **B.** ostrokątny **C.** prostokątny **D.** rozwartokątny

**Zadanie 4. W trójkącie *ABC* kąt przy wierzchołku *A* ma miarę 35°, a kąt przy wierzchołku *B* – 100°.**
**Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.** ___ / 1 pkt

| | | |
|---|---|---|
| 1. Najdłuższym bokiem trójkąta *ABC* jest bok *AC*. | **P** | **F** |
| 2. Bok *BC* jest dłuższy od boku *AB*. | **P** | **F** |

Podgląd • Pierwsza Ławka

**Zadanie 5. Trójkąt *KLM* jest podobny do trójkąta *ABC* w skali 3 (boki trójkąta *KLM* są 3 razy dłuższe). Pole trójkąta *ABC* jest równe 8, a jego obwód jest równy 14.**
**Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.**

___ / 2 pkt

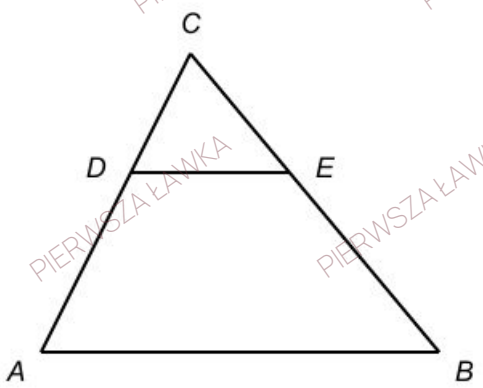
1. Pole trójkąta *KLM* jest równe _____ .
2. Obwód trójkąta *KLM* jest równy _____ .

**Zadanie 6. W trapezie *ABCD* podstawy mają długości $|AB| = 15$ i $|CD| = 6$. Przekątne trapezu przecinają się w punkcie *S*, a przekątna *AC* ma długość 14. Oblicz długość odcinka *AS*. Zapisz obliczenia.**

___ / 2 pkt

**Zadanie 7. W trójkącie *ABC* punkt *D* leży na boku *AC*, a punkt *E* – na boku *BC*, przy czym *DE* ∥ *AB* (zobacz rysunek). Wykaż, że $|CD| \cdot |CB| = |CE| \cdot |CA|$.**

___ / 2 pkt




Podgląd • Pierwsza Ławka

# Kartkówka 1: rodzaje trójkątów i twierdzenie Talesa – grupa A

15 minut · 9 pkt

KARTA 4/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 9 pkt

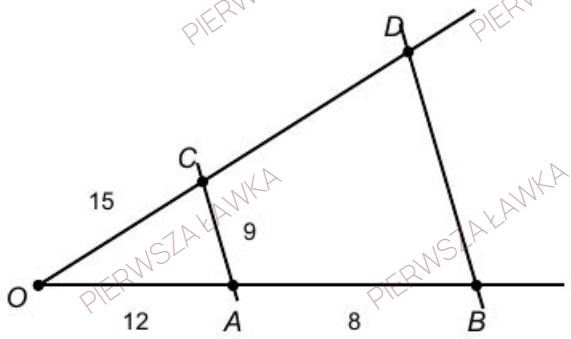
**Zadanie 1. Określ rodzaj trójkąta o podanych długościach boków (ostrokątny, prostokątny, rozwartokątny).** ___ / 3 pkt

1. 10, 24, 26: _____
2. 5, 9, 12: _____
3. 8, 9, 10: _____

**Zadanie 2. Kąty trójkąta mają miary 30°, 70° i 80°. Najkrótszy bok tego trójkąta leży naprzeciw kąta** ___ / 1 pkt

**A.** nie da się tego ustalić **B.** 70° **C.** 30° **D.** 80°

**Zadanie 3. Proste *AC* i *BD* są równoległe (zobacz rysunek). |*OA*| = 12, |*AB*| = 8, |*OC*| = 15, |*AC*| = 9. Oblicz |*CD*| i |*BD*|. Zapisz obliczenia.** ___ / 3 pkt




**Zadanie 4. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).** ___ / 2 pkt

| | | |
|---|---|---|
| 1. Istnieje trójkąt o bokach 4, 7 i 12. | **P** | **F** |
| 2. W trójkącie prostokątnym najdłuższy bok leży naprzeciw kąta prostego. | **P** | **F** |

Podgląd • Pierwsza Ławka

# Kartkówka 1: rodzaje trójkątów i twierdzenie Talesa – grupa B

15 minut · 9 pkt

KARTA 5/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 9 pkt

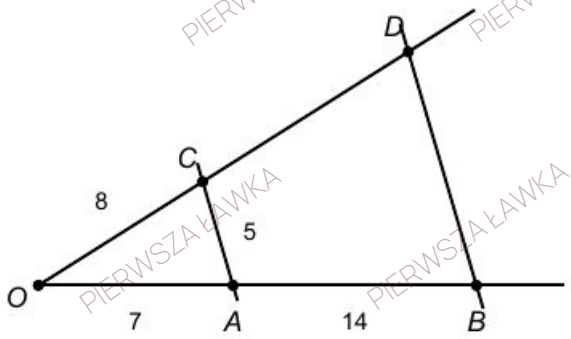
**Zadanie 1. Określ rodzaj trójkąta o podanych długościach boków (ostrokątny, prostokątny, rozwartokątny).** ___ / 3 pkt

1. 12, 16, 20: _____
2. 4, 6, 9: _____
3. 6, 7, 8: _____

**Zadanie 2. Kąty trójkąta mają miary 40°, 55° i 85°. Najkrótszy bok tego trójkąta leży naprzeciw kąta** ___ / 1 pkt

**A.** 55° **B.** 40° **C.** 85° **D.** nie da się tego ustalić

**Zadanie 3. Proste *AC* i *BD* są równoległe (zobacz rysunek). |*OA*| = 7, |*AB*| = 14, |*OC*| = 8, |*AC*| = 5. Oblicz |*CD*| i |*BD*|. Zapisz obliczenia.** ___ / 3 pkt




**Zadanie 4. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).** ___ / 2 pkt

| | | |
|---|---|---|
| 1. Istnieje trójkąt o bokach 3, 4 i 8. | **P** | **F** |
| 2. W trójkącie rozwartokątnym najdłuższy bok leży naprzeciw kąta rozwartego. | **P** | **F** |

Podgląd • Pierwsza Ławka

# Sprawdzian: Planimetria: trójkąty, twierdzenie Talesa, podobieństwo – grupa A

45 minut · 20 pkt

KARTA 8/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 20 pkt

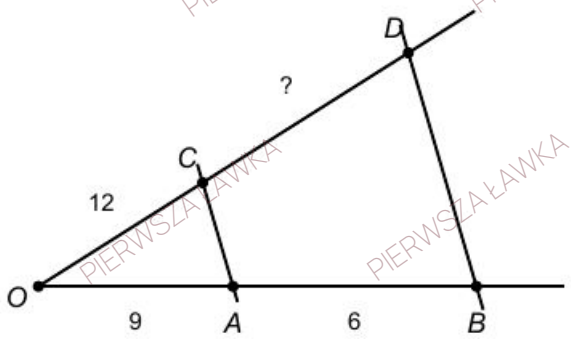
**Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**
**Trójkąt o bokach długości 9, 10 i 14** ___ / 1 pkt

**A.** nie istnieje **B.** jest rozwartokątny **C.** jest ostrokątny **D.** jest prostokątny

**Zadanie 2. W trójkącie *ABC* kąt przy wierzchołku *A* ma miarę 48°, a kąt przy wierzchołku *C* – 64°.**
**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**
**Boki trójkąta *ABC* uporządkowane od najkrótszego do najdłuższego to** ___ / 1 pkt

**A.** *BC*, *AB*, *AC*
**B.** *BC*, *AC*, *AB*
**C.** *AB*, *BC*, *AC*
**D.** *AC*, *AB*, *BC*

**Zadanie 3. Proste *AC* i *BD* są równoległe (zobacz rysunek). |*OA*| = 9, |*AB*| = 6, |*OC*| = 12.**
**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**
**Długość odcinka *CD* jest równa** ___ / 1 pkt




**A.** 12 **B.** 6 **C.** 20 **D.** 8

**Zadanie 4. Trójkąt *KLM* jest podobny do trójkąta *ABC*, a skala podobieństwa trójkąta *KLM* do *ABC* jest równa $\frac{2}{3}$.**
**Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.** ___ / 1 pkt

| | | |
|---|---|---|
| 1. Obwód trójkąta *KLM* jest równy $\frac{2}{3}$ obwodu trójkąta *ABC*. | **P** | **F** |
| 2. Pole trójkąta *KLM* jest równe $\frac{2}{3}$ pola trójkąta *ABC*. | **P** | **F** |

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

# Planimetria: trójkąty, twierdzenie Talesa, podobieństwo – kartkówki, sprawdzian i karty pracy z powtórką, matematyka, klasa 1 LO i technikum

Podgląd pokazał 10 z 32 stron. Pełna wersja: 32 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Planimetria: trójkąty, twierdzenie Talesa, podobieństwo – najważniejsze wiadomości – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 2: Planimetria: trójkąty, twierdzenie Talesa, podobieństwo – ćwiczenia – 8 zadań, 18 pkt
- Karta 3: Planimetria: trójkąty, twierdzenie Talesa, podobieństwo – zadania typu maturalnego – 7 zadań, 10 pkt
- Karta 4: Kartkówka 1: rodzaje trójkątów i twierdzenie Talesa – grupa A – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 5: Kartkówka 1: rodzaje trójkątów i twierdzenie Talesa – grupa B – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 6: Kartkówka 2: podobieństwo trójkątów, obwody i pola figur podobnych – grupa A – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 7: Kartkówka 2: podobieństwo trójkątów, obwody i pola figur podobnych – grupa B – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 8: Sprawdzian: Planimetria: trójkąty, twierdzenie Talesa, podobieństwo – grupa A – 10 zadań, 20 pkt
- Karta 9: Sprawdzian: Planimetria: trójkąty, twierdzenie Talesa, podobieństwo – grupa B – 10 zadań, 20 pkt Karta 1 przypomina teorię i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku.

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matematyka-liceum-klasa-1-dzial-08-planimetria-trojkaty-twierdzenie-talesa-podobienstw