PIERWSZA ŁAWKA · ZESTAW DZIAŁOWY · MATEMATYKA · KLASA 1 LO I TECHNIKUM · ZAKRES PODSTAWOWY

Dział 9. Funkcja kwadratowa – wykres i postaci

Wykres funkcji y = ax², przesunięcia wykresu, postać kanoniczna, ogólna i iloczynowa, wierzchołek i oś symetrii paraboli, zbiór wartości i monotoniczność, szkicowanie wykresu, miejsca zerowe z postaci iloczynowej, proste zastosowania. Dziewięć kart: teoria z przykładami, ćwiczenia, zadania typu maturalnego, dwie kartkówki (A i B) i sprawdzian (A i B) – z kluczem i zasadami oceniania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Funkcja kwadratowa – wykres i postaci – najważniejsze wiadomości** Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka	4 zad. 9 pkt
2	**Funkcja kwadratowa – wykres i postaci – ćwiczenia** Ćwiczę umiejętności z działu	8 zad. 25 pkt
3	**Funkcja kwadratowa – wykres i postaci – zadania typu maturalnego** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	7 zad. 11 pkt
4	**Kartkówka 1: postać kanoniczna, wierzchołek, przesunięcia wykresu – grupa A** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
5	**Kartkówka 1: postać kanoniczna, wierzchołek, przesunięcia wykresu – grupa B** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
6	**Kartkówka 2: postać ogólna i iloczynowa funkcji kwadratowej – grupa A** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
7	**Kartkówka 2: postać ogólna i iloczynowa funkcji kwadratowej – grupa B** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
8	**Sprawdzian: Funkcja kwadratowa – wykres i postaci – grupa A** 45 minut · 20 pkt	10 zad. 20 pkt
9	**Sprawdzian: Funkcja kwadratowa – wykres i postaci – grupa B** 45 minut · 20 pkt	10 zad. 20 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 przypomina najważniejsze wiadomości z działu i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku – od niej warto zacząć.
- Karta 2 to ćwiczenia, a karta 3 – zadania w formule matury 2027 (polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE).
- Karty 4–7 to dwie kartkówki (po 15 minut), każda w grupach A i B. Karty 8–9 to sprawdzian (45 minut) w grupach A i B – te same typy zadań i ta sama punktacja, inne liczby.
- Klucz na końcu zestawu zawiera odpowiedzi, przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE (kamienie milowe, błąd rachunkowy = −1 pkt).
- Osobny plik „Powtórka” zbiera definicje, wzory (z zaznaczeniem, które są w karcie wzorów CKE), typowe błędy i test „Sprawdź się”.

Materiał oryginalny. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: V.7, V.8 (także V.4, V.12; wstęp do V.9 i V.11); cele ogólne II.1, III.1, IV.1; dowody PP pkt 3 (wniosek z postaci kanonicznej). Miejsce w seriach podręczników: NE kl. 1 (wstęp) i kl. 2 · Pazdro kl. 1–2 · GWO kl. 1; technikum NE kl. 2. Nazwy wydawnictw i serii podano tylko informacyjnie – materiał nie jest z nimi powiązany. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

Funkcja kwadratowa – wykres i postaci – najważniejsze wiadomości

Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka

KARTA 1/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 9 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Funkcja** $f(x) = ax^2$, gdzie $a \neq 0$: wykresem jest parabola o wierzchołku $(0, 0)$ i osi symetrii $x = 0$. Dla $a > 0$ ramiona paraboli są skierowane w górę, dla $a < 0$ – w dół. Im większa wartość $|a|$, tym parabola jest „węższa”.
- **Postać kanoniczna** $f(x) = a(x - p)^2 + q$: wykres powstaje z paraboli $y = ax^2$ przez przesunięcie o p jednostek wzdłuż osi Ox i o q jednostek wzdłuż osi Oy. Wierzchołek $W = (p, q)$, oś symetrii – prosta $x = p$. Uwaga na znak: $(x + 3)^2 = (x - (-3))^2$, więc $p = -3$.
- **Postać ogólna** $f(x) = ax^2 + bx + c$: $c = f(0)$, więc wykres przecina oś Oy w punkcie $(0, c)$. Wierzchołek: $p = -\frac{b}{2a}$, $q = f(p)$ (albo $q = -\frac{\Delta}{4a}$, gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$). Postać kanoniczną można też otrzymać przez dopełnienie do kwadratu, np. $x^2 + 4x + 1 = (x + 2)^2 - 4 + 1$.
- **Monotoniczność i zbiór wartości.** Dla $a > 0$: funkcja maleje w $(-\infty, p\rangle$, rośnie w $\langle p, +\infty)$, zbiór wartości to $\langle q, +\infty)$. Dla $a < 0$: rośnie w $(-\infty, p\rangle$, maleje w $\langle p, +\infty)$, zbiór wartości to $(-\infty, q\rangle$.
- **Postać iloczynowa** $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$: liczby x_1, x_2 to miejsca zerowe (dla nich jeden z czynników jest równy 0). Wierzchołek leży na osi symetrii pośrodku między nimi: $p = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Postać iloczynowa istnieje tylko wtedy, gdy wykres ma punkt wspólny z osią Ox – np. $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ jej nie ma, bo $f(x) \geq 2$ dla każdego x.
- **Szkic wykresu – plan:** 1) kierunek ramion (znak a), 2) wierzchołek $W = (p, q)$ i oś symetrii, 3) punkt $(0, c)$ i punkt do niego symetryczny $(2p, c)$, 4) miejsca zerowe, jeśli łatwo je odczytać (postać iloczynowa), 5) krzywa symetryczna względem osi.
- Równania i nierówności kwadratowe oraz wyznaczanie wzoru funkcji z różnych informacji – w klasie 2. W „Wybranych wzorach matematycznych” CKE są: postać ogólna, kanoniczna i iloczynowa, wzory $p = -\frac{b}{2a}$, $q = -\frac{\Delta}{4a}$ i wyróżnik Δ. Przesunięć wykresu i odczytywania własności z wykresu trzeba się nauczyć.

Podgląd • Pierwsza Ławka

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 2(x + 1)^2 - 8$. Podaj wierzchołek paraboli, oś symetrii, zbiór wartości i przedziały monotoniczności. Sprawdź, że $f(x) = 2(x - 1)(x + 3)$, i podaj miejsca zerowe.

$a = 2 > 0$ – ramiona w górę. $W = (-1, -8)$, oś symetrii: $x = -1$. Zbiór wartości: $\langle -8, +\infty)$.

Funkcja maleje w $(-\infty, -1\rangle$ i rośnie w $\langle -1, +\infty)$.

$2(x + 1)^2 - 8 = 2x^2 + 4x + 2 - 8 = 2x^2 + 4x - 6$ oraz

$2(x - 1)(x + 3) = 2(x^2 + 2x - 3) = 2x^2 + 4x - 6$ – wzory są równe.

Miejsca zerowe: 1 i −3. Kontrola: $\frac{1 + (-3)}{2} = -1 = p$.

Przykład 2. Zapisz wzór funkcji $f(x) = x^2 - 6x + 5$ w postaci kanonicznej.

Sposób I: $p = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = 3$, $q = f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$, więc $f(x) = (x - 3)^2 - 4$.

Sposób II (dopełnienie do kwadratu): $x^2 - 6x + 5 = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 5 = (x - 3)^2 - 4$.

Przykład 3. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = -(x - 1)(x - 5)$. Podaj miejsca zerowe i wierzchołek paraboli. Zapisz wzór w postaci ogólnej i kanonicznej.

Miejsca zerowe: 1 i 5. $p = \frac{1 + 5}{2} = 3$, $q = f(3) = -(3 - 1)(3 - 5) = -2 \cdot (-2) = 4$, więc

$W = (3, 4)$.

Postać ogólna: $f(x) = -(x^2 - 6x + 5) = -x^2 + 6x - 5$. Postać kanoniczna: $f(x) = -(x - 3)^2 + 4$.

Przykład 4. Wierzchołkiem paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej f, jest punkt $W = (2, -3)$. Wykres przecina oś Oy w punkcie $(0, 5)$. Wyznacz wzór funkcji f.

Postać kanoniczna: $f(x) = a(x - 2)^2 - 3$. Z warunku $f(0) = 5$: $a \cdot 4 - 3 = 5$, więc $a = 2$.

$f(x) = 2(x - 2)^2 - 3 = 2x^2 - 8x + 5$.

ZADANIA

Zadanie 1. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 3(x - 4)^2 + 1$. Uzupełnij. ___ / 4 pkt

1. Wierzchołek paraboli: $W =$ _____
2. Oś symetrii: $x =$ _____
3. Ramiona paraboli są skierowane: _____
4. Zbiór wartości funkcji: _____

Zadanie 2. Wykres funkcji $f(x) = (x + 5)^2$ otrzymujemy z wykresu funkcji $y = x^2$ przez przesunięcie o 5 jednostek ___ / 1 pkt

A. w dół **B.** w lewo **C.** w górę **D.** w prawo

PIERWSZA ŁAWKA

Funkcja kwadratowa – wykres i postaci – ćwiczenia

KARTA 2/9

Ćwiczę umiejętności z działu

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 25 pkt

Zadanie 1. Dopasuj do każdego wzoru funkcji (1–4) wierzchołek jej wykresu (a–d). ___ / 4 pkt

1. $f(x) = (x - 2)^2 + 3$
2. $f(x) = (x + 2)^2 - 3$
3. $f(x) = -(x - 3)^2 + 2$
4. $f(x) = (x + 3)^2 + 2$

a) $W = (-3, 2)$

b) $W = (2, 3)$

c) $W = (3, 2)$

d) $W = (-2, -3)$

1 ____ 2 ____ 3 ____ 4 ____

Zadanie 2. Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji *f*. ___ / 4 pkt

1. $f(x) = x^2 + 8x + 10$: $W =$ _____
2. $f(x) = x^2 - 10x + 30$: $W =$ _____
3. $f(x) = 2x^2 - 12x + 7$: $W =$ _____
4. $f(x) = -x^2 + 4x + 1$: $W =$ _____

Zadanie 3. Funkcja *f* jest określona wzorem $f(x) = -2x^2 - 8x + 1$. Zapisz wzór w postaci kanonicznej. Podaj zbiór wartości i przedziały monotoniczności funkcji *f*. ___ / 3 pkt

Zadanie 4. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = (x - 1)^2 - 4$. Zaznacz wierzchołek, punkt przecięcia z osią *Oy* i miejsca zerowe. Sprawdź rachunkiem, że $f(x) = (x - 3)(x + 1)$. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 5. Wykresem której funkcji jest parabola o wierzchołku (−1, 4) i ramionach skierowanych w dół? ___ / 1 pkt

A. $f(x) = -3(x + 1)^2 + 4$

B. $f(x) = -3(x - 1)^2 + 4$

C. $f(x) = 3(x + 1)^2 + 4$

D. $f(x) = -3(x + 4)^2 - 1$

Zadanie 6. Funkcja *f* jest określona wzorem $f(x) = 2(x + 1)(x - 5)$. a) Podaj miejsca zerowe funkcji *f*. b) Wyznacz oś symetrii i wierzchołek paraboli. c) Zapisz wzór w postaci ogólnej i kanonicznej. ___ / 4 pkt

Zadanie 7. Parabola o wierzchołku $W = (-3, 2)$ przechodzi przez punkt (−1, 10). Wyznacz wzór funkcji kwadratowej, której wykresem jest ta parabola, w postaci kanonicznej i ogólnej. ___ / 3 pkt

Zadanie 8. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 3 pkt

1. Wykres funkcji $g(x) = (x - 4)^2 - 1$ otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $y = x^2$ o 4 jednostki w prawo i o 1 jednostkę w dół.	**P**	**F**
2. Wykres funkcji $h(x) = -x^2 + 6$ otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $y = x^2$ o 6 jednostek w górę.	**P**	**F**
3. Funkcja $k(x) = 5(x + 2)^2$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe.	**P**	**F**

Podgląd • Pierwsza Ławka

Kartkówka 1: postać kanoniczna, wierzchołek, przesunięcia wykresu – grupa A

15 minut · 8 pkt

KARTA 4/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

Zadanie 1. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = -(x + 6)^2 + 5$. Uzupełnij. ___ / 3 pkt

1. Wierzchołek paraboli: $W =$ _____
2. Oś symetrii: $x =$ _____
3. Zbiór wartości funkcji: _____

Zadanie 2. Wykres funkcji $g(x) = (x - 3)^2 + 7$ otrzymujemy z wykresu funkcji $y = x^2$ przez przesunięcie o ___ / 1 pkt

A. 3 jednostki w prawo i 7 jednostek w górę

B. 3 jednostki w prawo i 7 jednostek w dół

C. 7 jednostek w prawo i 3 jednostki w górę

D. 3 jednostki w lewo i 7 jednostek w górę

Zadanie 3. Zapisz wzór funkcji $f(x) = x^2 + 6x - 1$ w postaci kanonicznej. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli i przedziały monotoniczności funkcji f. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 4. Parabola o ramionach skierowanych w dół i wierzchołku w punkcie $(2, -1)$ jest wykresem funkcji ___ / 1 pkt

A. $f(x) = 4(x - 2)^2 - 1$

B. $f(x) = -4(x + 2)^2 - 1$

C. $f(x) = -4(x - 2)^2 - 1$

D. $f(x) = -4(x - 1)^2 + 2$

Podgląd • Pierwsza Ławka

Sprawdzian: Funkcja kwadratowa – wykres i postaci – grupa A

45 minut · 20 pkt

KARTA 8/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 20 pkt

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wierzchołkiem paraboli, która jest wykresem funkcji $f(x) = x^2 + 10x + 18$, jest punkt ___ / 1 pkt

A. $(5, -7)$ **B.** $(-5, 7)$ **C.** $(-10, 18)$ **D.** $(-5, -7)$

Zadanie 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Zbiorem wartości funkcji $f(x) = -4(x - 1)^2 + 6$ jest przedział ___ / 1 pkt

A. $(-\infty, 6\rangle$ **B.** $\langle 6, +\infty)$ **C.** $\langle -4, +\infty)$ **D.** $(-\infty, 1\rangle$

Zadanie 3. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja $f(x) = 3(x + 2)^2 - 1$ jest malejąca w przedziale ___ / 1 pkt

A. $(-\infty, -1\rangle$ **B.** $(-\infty, -2\rangle$ **C.** $\langle -2, +\infty)$ **D.** $(-\infty, 2\rangle$

Zadanie 4. Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = -(x - 3)(x + 5)$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Miejscami zerowymi funkcji f są liczby 3 i −5.	**P**	**F**
2. Wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji f, leży na osi Oy.	**P**	**F**

Zadanie 5. Wykres funkcji $y = 2x^2$ przesunięto o 3 jednostki w lewo i o 4 jednostki w dół. Otrzymano wykres funkcji g.

Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe. ___ / 2 pkt

1. W postaci kanonicznej $g(x) =$ _____ .
2. W postaci ogólnej $g(x) =$ _____ .

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 8. Funkcja kwadratowa *f* ma miejsca zerowe −2 oraz 4, a jej wykres przechodzi przez punkt (2, 16). Wyznacz wzór funkcji *f* w postaci ogólnej i oblicz współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji *f*. Zapisz obliczenia.

___ / 3 pkt

Zadanie 9. Łuk wjazdu do tunelu ma kształt paraboli. Oś *Ox* poprowadzono wzdłuż drogi, a oś *Oy* – przez lewy koniec łuku. Łuk opisuje funkcja $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$ (wymiary w metrach). Oblicz szerokość tunelu przy drodze i jego największą wysokość. Sprawdź, czy przez tunel przejedzie środkiem drogi samochód o szerokości 2 m i wysokości 4,2 m. Zapisz obliczenia.

___ / 4 pkt

Zadanie 10. Wykaż, że wykres funkcji $f(x) = x^2 + 8x + 19$ nie ma punktów wspólnych z osią *Ox*.

___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Funkcja kwadratowa – wykres i postaci – kartkówki, sprawdzian i karty pracy z powtórką, matematyka, klasa 1 LO i technikum (zakres podstawowy)

Podgląd pokazał 9 z 28 stron. Pełna wersja: 28 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Funkcja kwadratowa – wykres i postaci – najważniejsze wiadomości – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 2: Funkcja kwadratowa – wykres i postaci – ćwiczenia – 8 zadań, 25 pkt
- Karta 3: Funkcja kwadratowa – wykres i postaci – zadania typu maturalnego – 7 zadań, 11 pkt
- Karta 4: Kartkówka 1: postać kanoniczna, wierzchołek, przesunięcia wykresu – grupa A – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 5: Kartkówka 1: postać kanoniczna, wierzchołek, przesunięcia wykresu – grupa B – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 6: Kartkówka 2: postać ogólna i iloczynowa funkcji kwadratowej – grupa A – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 7: Kartkówka 2: postać ogólna i iloczynowa funkcji kwadratowej – grupa B – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 8: Sprawdzian: Funkcja kwadratowa – wykres i postaci – grupa A – 10 zadań, 20 pkt
- Karta 9: Sprawdzian: Funkcja kwadratowa – wykres i postaci – grupa B – 10 zadań, 20 pkt Karta 1 przypomina teorię i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku.

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail
pierwszalawka.pl/material/matematyka-liceum-klasa-1-dzial-09-funkcja-kwadratowa-wykres-i-postaci