PIERWSZA ŁAWKA · ZESTAW DZIAŁOWY · MATEMATYKA · KLASA 3 LO I TECHNIKUM · ZAKRES PODSTAWOWY

# Dział 1. Funkcja wykładnicza i logarytmiczna w zastosowaniach

Wykresy i własności funkcji wykładniczej i logarytmicznej, przesunięcia wykresu, monotoniczność potęgowania, porównywanie potęg i logarytmów, proste równania wykładnicze i logarytmiczne z definicji, odczyt z wykresu, modele wzrostu i zaniku o stałej krotności (populacje, okres półtrwania leku i izotopu, spadek wartości, stygnięcie), skala decybeli. Dziewięć kart: teoria z przykładami, ćwiczenia, zadania typu maturalnego, dwie kartkówki (A i B) i sprawdzian (A i B) – z kluczem i zasadami oceniania.

| Karta | Temat | Zadania |
|---|---|---|
| 1 | **Funkcja wykładnicza i logarytmiczna w zastosowaniach – najważniejsze wiadomości**<br>Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka | 3 zad.<br>10 pkt |
| 2 | **Funkcja wykładnicza i logarytmiczna w zastosowaniach – ćwiczenia**<br>Ćwiczę umiejętności z działu | 8 zad.<br>31 pkt |
| 3 | **Funkcja wykładnicza i logarytmiczna w zastosowaniach – zadania typu maturalnego**<br>Polecenia i punktacja jak na maturze 2027 | 7 zad.<br>12 pkt |
| 4 | **Kartkówka 1: wykresy i własności funkcji wykładniczej i logarytmicznej – grupa A**<br>15 minut · 9 pkt | 4 zad.<br>9 pkt |
| 5 | **Kartkówka 1: wykresy i własności funkcji wykładniczej i logarytmicznej – grupa B**<br>15 minut · 9 pkt | 4 zad.<br>9 pkt |
| 6 | **Kartkówka 2: równania i modele wykładnicze – grupa A**<br>15 minut · 7 pkt | 3 zad.<br>7 pkt |
| 7 | **Kartkówka 2: równania i modele wykładnicze – grupa B**<br>15 minut · 7 pkt | 3 zad.<br>7 pkt |
| 8 | **Sprawdzian: Funkcja wykładnicza i logarytmiczna w zastosowaniach – grupa A**<br>45 minut · 20 pkt | 10 zad.<br>20 pkt |

| | | |
|---|---|---|
| 9 | **Sprawdzian: Funkcja wykładnicza i logarytmiczna w zastosowaniach – grupa B**<br>45 minut · 20 pkt | 10 zad.<br>20 pkt |

**JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU**

- Karta 1 przypomina najważniejsze wiadomości z działu i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku – od niej warto zacząć.
- Karta 2 to ćwiczenia, a karta 3 – zadania w formule matury 2027 (polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE).
- Karty 4–7 to dwie kartkówki (po 15 minut), każda w grupach A i B. Karty 8–9 to sprawdzian (45 minut) w grupach A i B – te same typy zadań i ta sama punktacja, inne liczby.
- Klucz na końcu zestawu zawiera odpowiedzi, przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE (kamienie milowe, błąd rachunkowy = −1 pkt).
- Osobny plik „Powtórka” zbiera definicje, wzory (z zaznaczeniem, które są w karcie wzorów CKE), typowe błędy i test „Sprawdź się”.

Materiał oryginalny. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: V.14, I.5, I.9 (w tle I.1, I.4, I.8, V.3–V.4, V.12); cele ogólne II.1, III.2, IV.1; dowody PP pkt 4. Miejsce w seriach podręczników: NE kl. 3 (ZPiR kl. 2) · Pazdro kl. 4 · GWO kl. 2 · technikum NE kl. 3. Nazwy wydawnictw i serii podano tylko informacyjnie – materiał nie jest z nimi powiązany. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

PIERWSZA ŁAWKA

# Funkcja wykładnicza i logarytmiczna w zastosowaniach – najważniejsze wiadomości

Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka

KARTA 1/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 10 pkt

**PRZYPOMNIJ SOBIE**

- **Funkcja wykładnicza** $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$. Dziedzina: $\mathbb{R}$. Zbiór wartości: $(0, +\infty)$ – wartości są zawsze dodatnie, więc wykres nie przecina osi $Ox$ (funkcja nie ma miejsc zerowych). Wykres przechodzi przez punkty $(0, 1)$ i $(1, a)$, a oś $Ox$ jest jego asymptotą poziomą.
- **Monotoniczność.** Dla $a > 1$ funkcja $y = a^x$ jest rosnąca, dla $0 < a < 1$ – malejąca. To jest monotoniczność potęgowania: gdy $x < y$ i $a > 1$, to $a^x < a^y$; gdy $x < y$ i $0 < a < 1$, to $a^x > a^y$. Przykład: $1{,}1^{-3} < 1{,}1^{-2}$, ale $0{,}9^{-3} > 0{,}9^{-2}$.
- **Funkcja logarytmiczna** $g(x) = \log_a x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$. Dziedzina: $(0, +\infty)$. Zbiór wartości: $\mathbb{R}$. Wykres przechodzi przez punkty $(1, 0)$ i $(a, 1)$, oś $Oy$ jest jego asymptotą pionową. Dla $a > 1$ funkcja jest rosnąca, dla $0 < a < 1$ – malejąca. Dla $a > 1$: $\log_a x < 0$ dla $x \in (0, 1)$ i $\log_a x > 0$ dla $x > 1$.
- **Porównywanie liczb.** Potęgi o tej samej podstawie porównujemy przez wykładniki, a logarytmy o tej samej podstawie – przez liczby logarytmowane (pamiętaj o kierunku: przy podstawie z przedziału $(0, 1)$ nierówność się odwraca). Gdy podstawy są różne, sprowadź je do jednej ($8 = 2^3$, $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$).
- **Przesunięcia wykresu.** Wykres $y = a^{x-p} + q$ powstaje z wykresu $y = a^x$ przez przesunięcie o $p$ jednostek wzdłuż osi $Ox$ i o $q$ jednostek wzdłuż osi $Oy$. Asymptotą jest wtedy prosta $y = q$, a zbiorem wartości – przedział $(q, +\infty)$.
- **Równania z definicji.** $a^x = a^k \Leftrightarrow x = k$ (sprowadzamy obie strony do potęgi tej samej podstawy). $\log_a x = c \Leftrightarrow x = a^c$ – liczba logarytmowana musi być dodatnia, więc najpierw ustalamy, dla jakich $x$ równanie ma sens, a na końcu sprawdzamy rozwiązanie.
- **Model wykładniczy.** Wielkość, która w równych odstępach czasu zmienia się **tyle samo razy**, opisuje wzór $N(t) = N_0 \cdot q^t$, gdzie $N_0$ – wartość początkowa. Wzrost o $p$% na jednostkę czasu: $q = 1 + \frac{p}{100}$; spadek o $p$%: $q = 1 - \frac{p}{100}$. Podwajanie co $T$: $N_0 \cdot 2^{\frac{t}{T}}$; **okres połowicznego rozpadu** (półtrwania) $T$: $N_0 \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{t}{T}}$ – po czasie $T$ zostaje połowa, po $2T$ – ćwierć, po $3T$ – jedna ósma.
- **Skala logarytmiczna.** Gdy wielkości różnią się o rzędy wielkości (natężenie dźwięku, stężenie jonów), używa się logarytmu. Poziom natężenia dźwięku: $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ – wzrost poziomu o 10 dB oznacza 10 razy większe natężenie, o 20 dB – 100 razy większe.

- W „Wybranych wzorach matematycznych” CKE są definicja i własności logarytmu oraz monotoniczność potęgowania. **Nie ma** tam wykresów ani własności funkcji wykładniczej i logarytmicznej (dziedzina, zbiór wartości, punkty (0, 1) i (1, 0), asymptoty, monotoniczność funkcji logarytmicznej) – te trzeba pamiętać. Wzory modeli (np. na poziom natężenia dźwięku) są zawsze podane w treści zadania; na maturze wystarcza kalkulator prosty.

**PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM**

**Przykład 1. Porównaj liczby: a) $(\frac{3}{4})^{\sqrt{5}}$ i $(\frac{3}{4})^2$; b) $7^{0,4}$ i $7^{\frac{1}{3}}$; c) $\log_{\frac{1}{3}} 5$ i $\log_{\frac{1}{3}} 7$.**

a) Podstawa $\frac{3}{4} < 1$, a $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$. Większy wykładnik daje mniejszą potęgę: $(\frac{3}{4})^{\sqrt{5}} < (\frac{3}{4})^2$.

b) Podstawa $7 > 1$, a $0,4 = \frac{2}{5} > \frac{1}{3}$. Zatem $7^{0,4} > 7^{\frac{1}{3}}$.

c) Podstawa $\frac{1}{3} < 1$, więc funkcja $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ jest malejąca. $5 < 7$, zatem $\log_{\frac{1}{3}} 5 > \log_{\frac{1}{3}} 7$.

**Przykład 2. Wykres funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ przechodzi przez punkt $P = (2, \frac{9}{4})$. Wyznacz $a$, oblicz $f(-1)$ i określ monotoniczność funkcji $f$.**

Współrzędne punktu $P$ spełniają wzór: $a^2 = \frac{9}{4}$. Podstawa jest dodatnia, więc $a = \frac{3}{2}$.

$f(-1) = (\frac{3}{2})^{-1} = \frac{2}{3}$. Podstawa $\frac{3}{2} > 1$, więc funkcja $f$ jest rosnąca.

**Przykład 3. Funkcja $f$ jest określona wzorem $f(x) = 3^x - 9$. Podaj zbiór wartości i asymptotę wykresu. Oblicz, w jakim punkcie wykres przecina oś $Oy$, i wyznacz miejsce zerowe.**

Wykres $f$ to wykres $y = 3^x$ przesunięty o 9 jednostek w dół. Zbiór wartości: $(-9, +\infty)$, asymptota: $y = -9$.

$f(0) = 3^0 - 9 = -8$ – punkt $(0, -8)$. Miejsce zerowe: $3^x - 9 = 0$, $3^x = 3^2$, $x = 2$.

**Przykład 4. Rozwiąż równania: a) $5^{x+1} = \frac{1}{25}$; b) $\log_3 (2x - 1) = 2$; c) $4^x = 8$.**

a) $\frac{1}{25} = 5^{-2}$, więc $5^{x+1} = 5^{-2}$, czyli $x + 1 = -2$, $x = -3$.

b) Liczba logarytmowana musi być dodatnia: $2x - 1 > 0$, czyli $x > \frac{1}{2}$. Z definicji: $2x - 1 = 3^2 = 9$, więc $x = 5$ (spełnia warunek $x > \frac{1}{2}$).

c) $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$ i $8 = 2^3$, więc $2x = 3$, $x = \frac{3}{2}$.

PIERWSZA ŁAWKA

**Przykład 5. Liczba bakterii w hodowli podwaja się co 20 minut. Na początku obserwacji w hodowli było 1500 bakterii. Zapisz wzór funkcji $N(t)$ opisującej liczbę bakterii po $t$ minutach. Oblicz liczbę bakterii po 2 godzinach. Po ilu minutach w hodowli będzie 24 000 bakterii?**

Co 20 minut liczba mnoży się przez 2, więc $N(t) = 1500 \cdot 2^{\frac{t}{20}}$.

2 godziny = 120 minut, $\frac{120}{20} = 6$: $N(120) = 1500 \cdot 2^6 = 1500 \cdot 64 = 96\,000$.

$1500 \cdot 2^{\frac{t}{20}} = 24\,000$, czyli $2^{\frac{t}{20}} = 16 = 2^4$, $\frac{t}{20} = 4$, $t = 80$. Po 80 minutach.

**Przykład 6. Poziom natężenia dźwięku $L$ (w decybelach, dB) oblicza się ze wzoru $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$, gdzie $I$ – natężenie dźwięku (w W/m²), a $I_0 = 10^{-12}$ W/m² – natężenie najcichszego dźwięku słyszalnego przez człowieka. Rozmowa ma poziom 60 dB, a ruch uliczny – 80 dB. Ile razy natężenie dźwięku ruchu ulicznego jest większe od natężenia dźwięku rozmowy?**

Rozmowa: $10 \log \frac{I_1}{I_0} = 60$, więc $\frac{I_1}{I_0} = 10^6$, $I_1 = 10^{-6}$ W/m². Ruch uliczny: $\frac{I_2}{I_0} = 10^8$, $I_2 = 10^{-4}$ W/m².

$\frac{I_2}{I_1} = \frac{10^{-4}}{10^{-6}} = 10^2 = 100$. Natężenie jest 100 razy większe (różnica 20 dB = dwa rzędy wielkości).

## ZADANIA

**Zadanie 1. Funkcje $f$ i $g$ są określone wzorami $f(x) = 3^x$ oraz $g(x) = \log_2 x$. Uzupełnij.** ___ / 6 pkt

1. $f(0) =$ _____
2. $f(2) =$ _____
3. $f(-1) =$ _____
4. $g(1) =$ _____
5. $g(16) =$ _____
6. $g(\frac{1}{2}) =$ _____

**Zadanie 2. Funkcją rosnącą jest funkcja określona wzorem** ___ / 1 pkt

**A.** $y = (\frac{5}{4})^x$ **B.** $y = 0{,}6^x$ **C.** $y = (\frac{1}{3})^x$ **D.** $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

**Zadanie 3. Funkcja $h$ jest określona wzorem $h(x) = 4^x$. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F).** ___ / 3 pkt

| | | |
|---|---|---|
| 1. Wykres funkcji $h$ przechodzi przez punkt (0, 1). | **P** | **F** |
| 2. Funkcja $h$ ma miejsce zerowe. | **P** | **F** |
| 3. Zbiorem wartości funkcji $h$ jest przedział $(0, +\infty)$. | **P** | **F** |

Podgląd • Pierwsza Ławka

# Funkcja wykładnicza i logarytmiczna w zastosowaniach – ćwiczenia

Ćwiczę umiejętności z działu

KARTA 2/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 31 pkt

**Zadanie 1. Dopasuj do każdego wzoru funkcji (1–4) opis jej wykresu (a–d).** ___ / 4 pkt

1. $y = 5^x$
2. $y = (\frac{2}{5})^x$
3. $y = \log_5 x$
4. $y = \log_{\frac{2}{5}} x$

a) funkcja malejąca, wykres przechodzi przez punkt (1, 0)

b) funkcja rosnąca, wykres przechodzi przez punkt (0, 1)

c) funkcja malejąca, wykres przechodzi przez punkt (0, 1)

d) funkcja rosnąca, wykres przechodzi przez punkt (1, 0)

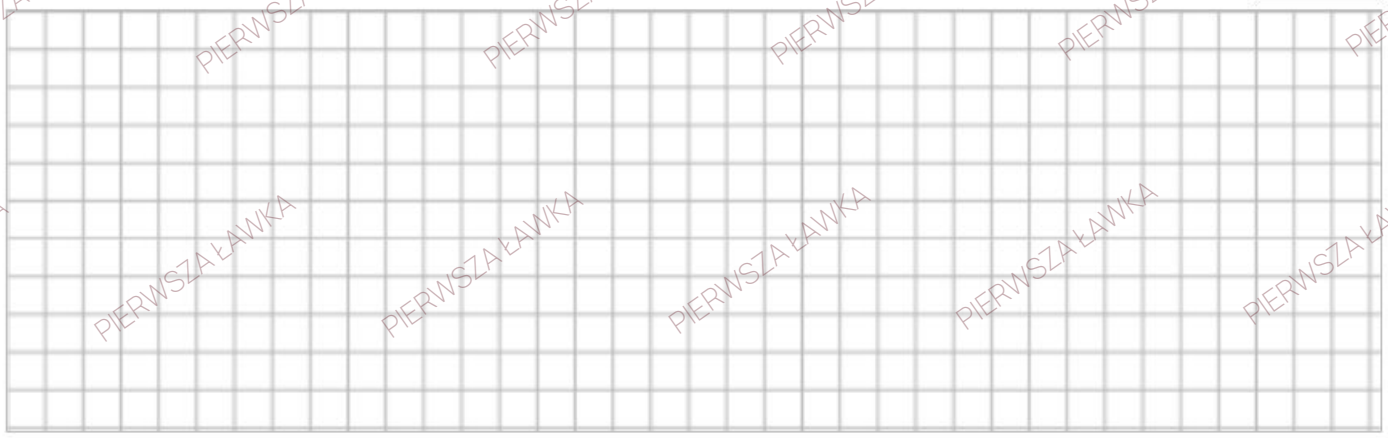
1 ____ 2 ____ 3 ____ 4 ____

**Zadanie 2. Wpisz w wykropkowane miejsce znak < albo > .** ___ / 5 pkt

1. $0{,}3^5$ _____ $0{,}3^2$
2. $2^{\sqrt{7}}$ _____ $2^{2{,}5}$
3. $\log_{0,5} 3$ _____ $\log_{0,5} 4$
4. $\log_4 7$ _____ $\log_4 5$
5. $(\frac{5}{3})^{-2}$ _____ $(\frac{5}{3})^{-1}$

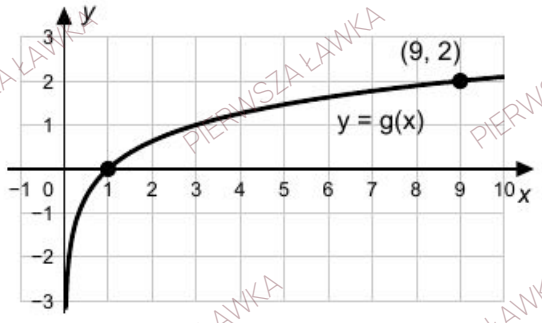
**Zadanie 3. Rozwiąż równania. a) $2^{x-3} = 16$ b) $9^x = 27$ c) $\log_5 (x + 2) = 2$ d) $\log_x 36 = 2$**

___ / 4 pkt



Podgląd • Pierwsza Ławka

**Zadanie 4. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji logarytmicznej $g(x) = \log_a x$. Wykres przechodzi przez punkt (9, 2). Uzupełnij.** ___ / 4 pkt




1. Podstawa logarytmu: $a =$ _____
2. $g(\frac{1}{3}) =$ _____
3. Funkcja $g$ przyjmuje wartości większe od 1 dla $x \in$ _____
4. Funkcja $g$ przyjmuje wartości ujemne dla $x \in$ _____

**Zadanie 5. Funkcja $f$ jest określona wzorem $f(x) = 2^{x+1} - 4$. a) Podaj zbiór wartości funkcji $f$ i równanie asymptoty jej wykresu. b) Oblicz współrzędne punktu przecięcia wykresu z osią $Oy$. c) Wyznacz miejsce zerowe funkcji $f$. d) Opisz, jak otrzymać wykres funkcji $f$ z wykresu funkcji $y = 2^x$.** ___ / 4 pkt

**Zadanie 6. Liczba komórek drożdży w hodowli potraja się co 3 godziny. Na początku obserwacji w hodowli było 200 tysięcy komórek. a) Zapisz wzór funkcji $N(t)$ opisującej liczbę komórek (w tysiącach) po $t$ godzinach. b) Oblicz liczbę komórek po 12 godzinach. c) Po ilu godzinach w hodowli będzie 48 600 tysięcy komórek?** ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

**Zadanie 7. Poziom natężenia dźwięku $L$ (w decybelach, dB) oblicza się ze wzoru $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$, gdzie $I$ – natężenie dźwięku (w W/m²), a $I_0 = 10^{-12}$ W/m² – natężenie najcichszego dźwięku słyszalnego przez człowieka. Odkurzacz wytwarza dźwięk o natężeniu $10^{-5}$ W/m², a szept ma poziom 30 dB. a) Oblicz poziom natężenia dźwięku odkurzacza. b) Ile razy natężenie dźwięku odkurzacza jest większe od natężenia szeptu?** ___ / 3 pkt

**Zadanie 8. Temperatura herbaty (w °C) po $t$ minutach od zaparzenia jest opisana wzorem $T(t) = 20 + 72 \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{t}{10}}$. a) Jaką temperaturę ma herbata tuż po zaparzeniu? b) Jaką temperaturę ma herbata po 10 minutach? c) Po ilu minutach herbata ostygnie do 29 °C? d) Wyjaśnij, dlaczego temperatura herbaty nigdy nie spadnie poniżej 20 °C.** ___ / 4 pkt

PIERWSZA ŁAWKA

# Kartkówka 1: wykresy i własności funkcji wykładniczej i logarytmicznej – grupa A

15 minut · 9 pkt

KARTA 4/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 9 pkt

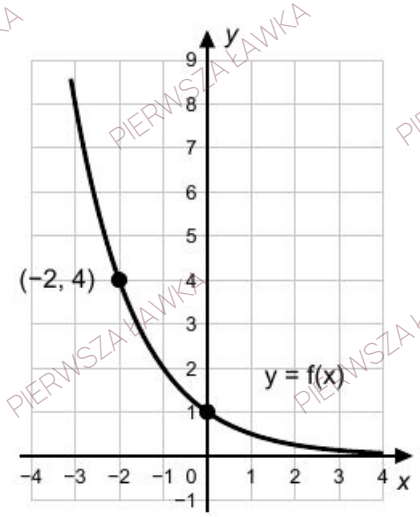
**Zadanie 1. Funkcja *f* jest określona wzorem $f(x) = (\frac{1}{2})^x$. Uzupełnij.** ___ / 3 pkt

1. $f(-3)$ = _____
2. Zbiór wartości funkcji $f$: _____
3. Funkcja $f$ jest (rosnąca / malejąca): _____

**Zadanie 2. Wskaż nierówność prawdziwą.** ___ / 1 pkt

**A.** $\log_{0,2} 5 > \log_{0,2} 2$ **B.** $(\frac{7}{6})^{-3} > (\frac{7}{6})^{-2}$ **C.** $0{,}4^3 < 0{,}4^2$ **D.** $3^{\sqrt{2}} > 3^{1,5}$

**Zadanie 3. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$. Wykres przechodzi przez punkt (−2, 4). Wyznacz $a$. Oblicz $f(3)$. Podaj zbiór wszystkich argumentów, dla których $f(x) > 4$. Zapisz obliczenia.** ___ / 3 pkt



# Sprawdzian: Funkcja wykładnicza i logarytmiczna w zastosowaniach – grupa A

45 minut · 20 pkt

KARTA 8/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 20 pkt

**Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**
**Funkcją malejącą jest funkcja określona wzorem** ___ / 1 pkt

**A.** $y = 0{,}9^x$ **B.** $y = \log_3 x$ **C.** $y = (\frac{7}{2})^x$ **D.** $y = 1{,}5^x$

**Zadanie 2. Wykres funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ przechodzi przez punkt $(3, \frac{1}{27})$.**
**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**
**Podstawa $a$ jest równa** ___ / 1 pkt

**A.** $\frac{1}{9}$ **B.** 3 **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $-3$

**Zadanie 3. Funkcja $g$ jest określona wzorem $g(x) = \log_7 x$ dla $x > 0$.**
**Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.** ___ / 1 pkt

| | | |
|---|---|---|
| 1. $g(\frac{1}{49}) = -2$ | **P** | **F** |
| 2. Funkcja $g$ przyjmuje wartości ujemne dla każdego $x > 1$. | **P** | **F** |

**Zadanie 4. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**
**Zbiorem wartości funkcji $f(x) = 2^x + 3$ jest przedział** ___ / 1 pkt

**A.** $(0, +\infty)$ **B.** $(3, +\infty)$
**C.** $(-\infty, 3)$ **D.** $(2, +\infty)$

**Zadanie 5. Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.** ___ / 3 pkt

1. Rozwiązaniem równania $5^{2x-1} = 125$ jest liczba _____ .
2. Rozwiązaniem równania $\log_2 (x + 5) = 4$ jest liczba _____ .
3. Rozwiązaniem równania $(\frac{1}{2})^x = 8$ jest liczba _____ .

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

# Funkcja wykładnicza i logarytmiczna w zastosowaniach – kartkówki, sprawdzian i karty pracy z powtórką, matematyka, klasa 3 LO i technikum

Podgląd pokazał 10 z 33 stron. Pełna wersja: 33 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Funkcja wykładnicza i logarytmiczna w zastosowaniach – najważniejsze wiadomości – 3 zadania, 10 pkt
- Karta 2: Funkcja wykładnicza i logarytmiczna w zastosowaniach – ćwiczenia – 8 zadań, 31 pkt
- Karta 3: Funkcja wykładnicza i logarytmiczna w zastosowaniach – zadania typu maturalnego – 7 zadań, 12 pkt
- Karta 4: Kartkówka 1: wykresy i własności funkcji wykładniczej i logarytmicznej – grupa A – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 5: Kartkówka 1: wykresy i własności funkcji wykładniczej i logarytmicznej – grupa B – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 6: Kartkówka 2: równania i modele wykładnicze – grupa A – 3 zadania, 7 pkt
- Karta 7: Kartkówka 2: równania i modele wykładnicze – grupa B – 3 zadania, 7 pkt
- Karta 8: Sprawdzian: Funkcja wykładnicza i logarytmiczna w zastosowaniach – grupa A – 10 zadań, 20 pkt
- Karta 9: Sprawdzian: Funkcja wykładnicza i logarytmiczna w zastosowaniach – grupa B – 10 zadań, 20 pkt Karta 1 przypomina teorię i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku.

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matematyka-liceum-klasa-3-dzial-01-funkcja-wykladnicza-i-logarytmiczna-w-zastosowan