PIERWSZA ŁAWKA · ZESTAW DZIAŁOWY · MATEMATYKA · KLASA 2 LO I TECHNIKUM · ZAKRES PODSTAWOWY

Dział 3. Wielomiany

Stopień i współczynniki wielomianu, wartość wielomianu, dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów jednej i wielu zmiennych, równość wielomianów, rozkład na czynniki przez wyłączanie jednomianu przed nawias i wzory skróconego mnożenia, równania $W(x) = 0$ w postaci iloczynowej, wielomian jako model. Dziewięć kart: teoria z przykładami, ćwiczenia, zadania typu maturalnego, dwie kartkówki (A i B) i sprawdzian (A i B) – z kluczem i zasadami oceniania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Wielomiany – najważniejsze wiadomości** Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka	3 zad. 8 pkt
2	**Wielomiany – ćwiczenia** Ćwiczę umiejętności z działu	8 zad. 22 pkt
3	**Wielomiany – zadania typu maturalnego** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	8 zad. 12 pkt
4	**Kartkówka 1: działania na wielomianach – grupa A** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
5	**Kartkówka 1: działania na wielomianach – grupa B** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
6	**Kartkówka 2: równania wielomianowe w postaci iloczynowej – grupa A** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
7	**Kartkówka 2: równania wielomianowe w postaci iloczynowej – grupa B** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
8	**Sprawdzian: Wielomiany – grupa A** 45 minut · 21 pkt	10 zad. 21 pkt
9	**Sprawdzian: Wielomiany – grupa B** 45 minut · 21 pkt	10 zad. 21 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 przypomina najważniejsze wiadomości z działu i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku – od niej warto zacząć.
- Karta 2 to ćwiczenia, a karta 3 – zadania w formule matury 2027 (polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE).

- Karty 4–7 to dwie kartkówki (po 15 minut), każda w grupach A i B. Karty 8–9 to sprawdzian (45 minut) w grupach A i B – te same typy zadań i ta sama punktacja, inne liczby.
- Klucz na końcu zestawu zawiera odpowiedzi, przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE (kamienie milowe, błąd rachunkowy = −1 pkt).
- Osobny plik „Powtórka” zbiera definicje, wzory (z zaznaczeniem, które są w karcie wzorów CKE), typowe błędy i test „Sprawdź się”.

Materiał oryginalny. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: II.2, II.3, III.5 (w tle II.1, III.4, V.2); cele ogólne I, III.1, IV.1. Miejsce w seriach podręczników: NE kl. 2 · Pazdro kl. 2 · GWO kl. 2 · technikum NE kl. 2. Nazwy wydawnictw i serii podano tylko informacyjnie – materiał nie jest z nimi powiązany. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

PIERWSZA ŁAWKA

Wielomiany – najważniejsze wiadomości

Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka

KARTA 1/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Wielomian** stopnia n zmiennej x to wyrażenie $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_n \neq 0$. Liczby $a_n, \ldots, a_0$ to **współczynniki**, a_0 – **wyraz wolny**. Np. $W(x) = -3x^4 + x^2 - 7$ ma stopień 4, współczynnik przy x^3 równy 0 i wyraz wolny −7. Liczba różna od zera to wielomian stopnia 0, a wielomian zerowy nie ma stopnia.
- **Wartość wielomianu** dla $x = a$ to liczba $W(a)$ – podstawiamy a w miejsce x (liczbę ujemną bierzemy w nawias). Zawsze $W(0) = a_0$ (wyraz wolny), a $W(1)$ to suma wszystkich współczynników. Liczba a jest **pierwiastkiem** wielomianu W, gdy $W(a) = 0$.
- **Dodawanie i odejmowanie:** redukujemy wyrazy podobne (te same potęgi x); odejmowany wielomian bierzemy w nawias – minus zmienia znaki wszystkich jego wyrazów. **Mnożenie:** każdy wyraz pierwszego wielomianu mnożymy przez każdy wyraz drugiego. Tak samo działamy na wielomianach wielu zmiennych, np. $(a - 2b)(a + b) = a^2 - ab - 2b^2$.
- **Stopień iloczynu** dwóch niezerowych wielomianów jest **sumą** ich stopni. Współczynnik przy najwyższej potędze iloczynu to iloczyn takich współczynników czynników, a wyraz wolny iloczynu – iloczyn wyrazów wolnych. Stopień sumy nie przekracza większego ze stopni składników (może być mniejszy, gdy najwyższe potęgi się zredukują).
- **Równość wielomianów:** dwa wielomiany są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam stopień i równe współczynniki przy tych samych potęgach x. Tak wyznaczamy nieznane współczynniki: wymnażamy, porządkujemy według potęg i porównujemy współczynniki.
- **Rozkład na czynniki w zakresie podstawowym:** 1) wyłącz przed nawias wspólny jednomian, 2) w nawiasie szukaj wzoru skróconego mnożenia albo zapisz trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej. Np. $x^3 - 16x = x(x - 4)(x + 4)$ oraz $2x^4 + 12x^3 + 18x^2 = 2x^2(x + 3)^2$.
- **Równanie w postaci iloczynowej:** iloczyn jest równy 0 wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden czynnik jest równy 0. Każdy czynnik przyrównujemy do zera osobno. Czynnik liniowy daje jedno rozwiązanie, kwadrat dwumianu, np. $(x - 3)^2$, też jedno (liczymy je raz), a czynnik $x^2 + 4$ (ogólnie: trójmian z $\Delta < 0$) i stała różna od 0 – żadnego.
- **Nie dziel równania przez x** (ani przez x^2) – stracisz rozwiązanie $x = 0$. Przenieś wszystko na jedną stronę i wyłącz x przed nawias: $x^3 = 9x \Leftrightarrow x^3 - 9x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3)(x + 3) = 0$.
- Dzielenie wielomianów, schemat Hornera, twierdzenie Bézouta, grupowanie wyrazów, szukanie pierwiastków całkowitych i nierówności wielomianowe to **zakres rozszerzony**. W „Wybranych wzorach matematycznych” CKE są wzory skróconego mnożenia i wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego – innych wzorów o wielomianach tam nie ma.

Podgląd • Pierwsza Ławka

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. Dane są wielomiany $W(x) = 2x^3 - x + 4$ i $P(x) = x^2 - 3x$. Wyznacz $W(x) - 2P(x)$ oraz $W(x) \cdot P(x)$ i podaj stopnie otrzymanych wielomianów.

$W(x) - 2P(x) = 2x^3 - x + 4 - (2x^2 - 6x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x + 4$ – stopień 3.

$W(x) \cdot P(x) = (2x^3 - x + 4)(x^2 - 3x) = 2x^5 - 6x^4 - x^3 + 3x^2 + 4x^2 - 12x = 2x^5 - 6x^4 - x^3 + 7x^2 - 12x$ – stopień 5.

Sprawdzenie stopnia bez mnożenia: iloczyn najwyższych potęg to $2x^3 \cdot x^2 = 2x^5$, czyli stopień $3 + 2 = 5$.

Przykład 2. Wyznacz liczby a i b, dla których wielomiany $W(x) = (x + a)(2x - 3)$ i $P(x) = 2x^2 + bx - 12$ są równe.

Wymnażamy: $W(x) = 2x^2 - 3x + 2ax - 3a = 2x^2 + (2a - 3)x - 3a$.

Porównujemy współczynniki. Wyrazy wolne: $-3a = -12$, więc $a = 4$. Współczynniki przy x: $b = 2a - 3 = 5$.

Odpowiedź: $a = 4$, $b = 5$. Sprawdzenie: $(x + 4)(2x - 3) = 2x^2 + 5x - 12$.

Przykład 3. Rozwiąż równanie $x^3 - 6x^2 - 16x = 0$.

Wyłączamy x przed nawias (nie dzielimy przez x!): $x(x^2 - 6x - 16) = 0$.

$x = 0$ lub $x^2 - 6x - 16 = 0$. $\Delta = 36 + 64 = 100$, $x = \frac{6 - 10}{2} = -2$ lub $x = \frac{6 + 10}{2} = 8$.

Postać iloczynowa: $x(x + 2)(x - 8) = 0$. Odpowiedź: $x \in \{-2, 0, 8\}$.

Przykład 4. Ile rozwiązań ma równanie $3(x^2 - 5)(x + 1)^2(x^2 + 9) = 0$? Podaj je.

Czynnik 3 jest różny od 0 – nie daje rozwiązań.

$x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5}$ lub $x = \sqrt{5}$.

$(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ – jedno rozwiązanie, choć czynnik jest w kwadracie.

$x^2 + 9 = 0$ nie ma rozwiązań, bo $x^2 + 9 \geq 9 > 0$.

Równanie ma **3 rozwiązania**: $-\sqrt{5}$, -1, $\sqrt{5}$.

Przykład 5. Rozwiąż równanie $4x^4 = 25x^2$.

Przenosimy wszystko na jedną stronę: $4x^4 - 25x^2 = 0$.

Wyłączamy x^2 i stosujemy wzór na różnicę kwadratów: $x^2(4x^2 - 25) = x^2(2x - 5)(2x + 5) = 0$.

$x = 0$ lub $x = \frac{5}{2}$ lub $x = -\frac{5}{2}$. Po podzieleniu obu stron przez x^2 zgubilibyśmy rozwiązanie $x = 0$.

ZADANIA

Zadanie 1. Dany jest wielomian $W(x) = 5x^4 - 3x^2 + x - 8$. Uzupełnij. ___ / 4 pkt

1. stopień wielomianu W: _____
2. współczynnik przy x^2: _____
3. wyraz wolny: _____
4. $W(1)$ = _____

Zadanie 2. Wartość wielomianu $W(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ dla $x = -2$ jest równa ___ / 1 pkt

A. -5 **B.** 3 **C.** -13 **D.** 19

Podgląd • Pierwsza Ławka

Wielomiany – ćwiczenia

Ćwiczę umiejętności z działu

KARTA 2/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 22 pkt

Zadanie 1. Dane są wielomiany $P(x) = 3x^2 - 2x + 1$ i $Q(x) = x^2 + 4x - 5$. Wyznacz. ___ / 3 pkt

1. $P(x) + Q(x) =$ _____
2. $P(x) - Q(x) =$ _____
3. $2P(x) - 3Q(x) =$ _____

Zadanie 2. Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne. ___ / 3 pkt

1. $(x - 3)(x^2 + 2x - 1) =$ _____
2. $(x^2 + 2)(x^2 - 2) =$ _____
3. $(2a - b)(a^2 + ab - 3b^2) =$ _____

Zadanie 3. Nie wykonując mnożenia, odczytaj własności wielomianu $W(x) = (2x^3 - 1)(3x^2 + x - 4)(x - 5)$. ___ / 3 pkt

1. stopień wielomianu W: _____
2. współczynnik przy najwyższej potędze x: _____
3. wyraz wolny: _____

Zadanie 4. Dopasuj do każdego wielomianu (1–4) jego rozkład na czynniki (a–e). Jeden rozkład nie pasuje do żadnego wielomianu. ___ / 4 pkt

1. $x^3 - 9x$
2. $x^3 - 6x^2 + 9x$
3. $2x^3 + 6x^2$
4. $x^4 - 9x^2$

a) $x(x + 3)^2$

b) $x^2(x - 3)(x + 3)$

c) $x(x - 3)(x + 3)$

d) $2x^2(x + 3)$

e) $x(x - 3)^2$

1 ____ 2 ____ 3 ____ 4 ____

Zadanie 5. Wyznacz liczby a i b, dla których wielomiany $W(x) = (ax + 1)(x^2 - 3) + b$ i $P(x) = 2x^3 + x^2 - 6x + 4$ są równe. ___ / 2 pkt

PIERWSZA ŁAWKA

Wielomiany – zadania typu maturalnego

KARTA 3/9

Polecenia i punktacja jak na maturze 2027

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 12 pkt

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Równanie $-2(x-5)(x^2-5)(x^2+5)=0$ w zbiorze liczb rzeczywistych ma dokładnie ___ / 1 pkt

A. trzy rozwiązania.
B. pięć rozwiązań.
C. dwa rozwiązania.
D. cztery rozwiązania.

Zadanie 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Dla każdej liczby rzeczywistej x wyrażenie $(x^2-2x+3)(x+2)-x^3$ jest równe ___ / 1 pkt

A. $-7x+6$ **B.** $4x^2-x+6$ **C.** $-x-6$ **D.** $-x+6$

Zadanie 3. Dany jest wielomian $W(x)=x^3-4x^2-5x$.
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Suma wszystkich rozwiązań równania $W(x)=0$ jest równa 4.	**P**	**F**
2. Liczba (-5) jest pierwiastkiem wielomianu W.	**P**	**F**

Zadanie 4. Dane są wielomiany $W(x)=2x^3-3x+1$ oraz $P(x)=x^2+x$.
Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe. ___ / 2 pkt

1. Stopień wielomianu $W(x)\cdot P(x)$ jest równy _____ .
2. Współczynnik przy x^2 w wielomianie $W(x)-2x\cdot P(x)$ jest równy _____ .

Zadanie 5. Równanie $x(x-4)(x+k)=0$, w którym k jest pewną liczbą rzeczywistą, ma w zbiorze liczb rzeczywistych dokładnie dwa rozwiązania.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczba k może być równa ___ / 1 pkt

A. 4 **B.** -2 **C.** -4 **D.** 2

Zadanie 6. Wielomiany $W(x)=(x+a)^2-5$ oraz $P(x)=x^2-6x+b$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi, są równe.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczby a i b spełniają warunki ___ / 1 pkt

A. $a=-3$ i $b=4$
B. $a=3$ i $b=4$
C. $a=-3$ i $b=14$
D. $a=-6$ i $b=31$

Podgląd • Pierwsza Ławka

Kartkówka 1: działania na wielomianach – grupa A

KARTA 4/9

15 minut · 8 pkt

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

Zadanie 1. Dane są wielomiany $F(x) = 4x^3 - x^2 + 2$ i $G(x) = x^3 + 3x^2 - 5x$. Wyznacz. ___ / 2 pkt

1. $F(x) - G(x) =$ _____
2. $F(x) + 2G(x) =$ _____

Zadanie 2. Wartość wielomianu $W(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 1$ dla $x = -2$ jest równa ___ / 1 pkt

A. -3 **B.** -1 **C.** -5 **D.** 31

Zadanie 3. Wykonaj mnożenie $(2x - 1)(x^2 + 3x - 4)$ i zapisz wynik w postaci wielomianu uporządkowanego. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 4. Wyznacz liczby a i b, dla których wielomiany $W(x) = (x - 3)(x^2 + ax + 2)$ i $P(x) = x^3 + bx^2 - 4x - 6$ są równe. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Kartkówka 1: działania na wielomianach – grupa B

15 minut · 8 pkt

KARTA 5/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

Zadanie 1. Dane są wielomiany $U(x) = 5x^3 + 2x^2 - 3$ i $V(x) = 2x^3 - x^2 + 4x$. Wyznacz. ___ / 2 pkt

1. $U(x) - V(x) =$ _____
2. $U(x) + 2V(x) =$ _____

Zadanie 2. Wartość wielomianu $W(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 4$ dla $x = -1$ jest równa ___ / 1 pkt

A. -8 **B.** 0 **C.** -2 **D.** -10

Zadanie 3. Wykonaj mnożenie $(3x + 2)(x^2 - 2x + 1)$ i zapisz wynik w postaci wielomianu uporządkowanego. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Zadanie 4. Wyznacz liczby a i b, dla których wielomiany $W(x) = (x + 2)(x^2 + ax - 3)$ i $P(x) = x^3 + bx^2 - 11x - 6$ są równe. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Sprawdzian: Wielomiany – grupa A

45 minut · 21 pkt

KARTA 8/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 21 pkt

Zadanie 1. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wyraz wolny wielomianu $W(x) = (3x^2 - 2)(x^3 + 4)(x - 5)$ jest równy ___ / 1 pkt

A. −10 **B.** −3 **C.** −40 **D.** 40

Zadanie 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wartość wielomianu $W(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$ dla $x = -1$ jest równa ___ / 1 pkt

A. 1 **B.** −1 **C.** −5 **D.** 7

Zadanie 3. Dany jest wielomian $W(x) = (x^2 - 4)(x + 1)$.
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Wielomian W jest stopnia 3.	**P**	**F**
2. Równanie $W(x) = 0$ ma dokładnie dwa rozwiązania.	**P**	**F**

Zadanie 4. Równanie $(x - 5)(x + 2)(x - k) = 0$, w którym k jest pewną liczbą rzeczywistą różną od 5 i od −2, ma trzy rozwiązania. Iloczyn tych rozwiązań jest równy 30.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Liczba k jest równa ___ / 1 pkt

A. 6 **B.** −6 **C.** −3 **D.** 3

Zadanie 5. Dane są wielomiany $P(x) = 2x^2 - x$ i $Q(x) = x^3 + 3$.
Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe. ___ / 2 pkt

1. Stopień wielomianu $P(x) \cdot Q(x)$ jest równy _____ .
2. Współczynnik przy x^2 w wielomianie $P(x) \cdot Q(x)$ jest równy _____ .

Zadanie 6. Rozłóż wielomian na czynniki możliwie najniższego stopnia. ___ / 3 pkt

1. $x^3 - 25x =$ _____
2. $2x^3 + 8x^2 + 8x =$ _____
3. $5x^4 - 20x^2 =$ _____

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Wielomiany – kartkówki, sprawdzian i karty pracy z powtórką, matematyka, klasa 2 LO i technikum (zakres podstawowy)

Podgląd pokazał 9 z 28 stron. Pełna wersja: 28 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Wielomiany – najważniejsze wiadomości – 3 zadania, 8 pkt
- Karta 2: Wielomiany – ćwiczenia – 8 zadań, 22 pkt
- Karta 3: Wielomiany – zadania typu maturalnego – 8 zadań, 12 pkt
- Karta 4: Kartkówka 1: działania na wielomianach – grupa A – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 5: Kartkówka 1: działania na wielomianach – grupa B – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 6: Kartkówka 2: równania wielomianowe w postaci iloczynowej – grupa A – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 7: Kartkówka 2: równania wielomianowe w postaci iloczynowej – grupa B – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 8: Sprawdzian: Wielomiany – grupa A – 10 zadań, 21 pkt
- Karta 9: Sprawdzian: Wielomiany – grupa B – 10 zadań, 21 pkt Karta 1 przypomina teorię i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku.

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail
pierwszalawka.pl/material/matematyka-liceum-klasa-2-dzial-03-wielomiany