PIERWSZA ŁAWKA · ZESTAW DZIAŁOWY · MATEMATYKA · KLASA 2 LO I TECHNIKUM · ZAKRES PODSTAWOWY

Dział 6. Planimetria: okręgi, kąty w okręgu, wielokąty

Promienie, średnice, cięciwy i odcinki stycznych (z twierdzeniem Pitagorasa), kąty wpisane i środkowe, długość łuku i pole wycinka koła, wielokąty foremne (kąty, przekątne, sześciokąt), kąty i przekątne w równoległobokach, prostokątach, rombach i trapezach, dowód twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym. Dziewięć kart: teoria z przykładami, ćwiczenia, zadania typu maturalnego, dwie kartkówki (A i B) i sprawdzian (A i B) – z kluczem i zasadami oceniania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Planimetria: okręgi, kąty w okręgu, wielokąty – najważniejsze wiadomości** Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka	3 zad. 8 pkt
2	**Planimetria: okręgi, kąty w okręgu, wielokąty – ćwiczenia** Ćwiczę umiejętności z działu	8 zad. 22 pkt
3	**Planimetria: okręgi, kąty w okręgu, wielokąty – zadania typu maturalnego** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	8 zad. 11 pkt
4	**Kartkówka 1: cięciwy, styczne i kąty w okręgu – grupa A** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
5	**Kartkówka 1: cięciwy, styczne i kąty w okręgu – grupa B** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
6	**Kartkówka 2: łuki, wycinki, wielokąty foremne i czworokąty – grupa A** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
7	**Kartkówka 2: łuki, wycinki, wielokąty foremne i czworokąty – grupa B** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
8	**Sprawdzian: Planimetria: okręgi, kąty w okręgu, wielokąty – grupa A** 45 minut · 20 pkt	10 zad. 20 pkt
9	**Sprawdzian: Planimetria: okręgi, kąty w okręgu, wielokąty – grupa B** 45 minut · 20 pkt	10 zad. 20 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 przypomina najważniejsze wiadomości z działu i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku – od niej warto zacząć.
- Karta 2 to ćwiczenia, a karta 3 – zadania w formule matury 2027 (polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE).
- Karty 4–7 to dwie kartkówki (po 15 minut), każda w grupach A i B. Karty 8–9 to sprawdzian (45 minut) w grupach A i B – te same typy zadań i ta sama punktacja, inne liczby.
- Klucz na końcu zestawu zawiera odpowiedzi, przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE (kamienie milowe, błąd rachunkowy = −1 pkt).
- Osobny plik „Powtórka” zbiera definicje, wzory (z zaznaczeniem, które są w karcie wzorów CKE), typowe błędy i test „Sprawdź się”.

Materiał oryginalny. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: VIII.1, VIII.3, VIII.4, VIII.5, VIII.6, VIII.11; cele ogólne III.1, IV.1, IV.3; dowody PP pkt 6; czworokąty wpisane i opisane (VIII.R1) – tylko informacja. Miejsce w seriach podręczników: NE kl. 2 · Pazdro kl. 2 (czworokąty – kl. 3) · GWO kl. 2; technikum NE kl. 2. Nazwy wydawnictw i serii podano tylko informacyjnie – materiał nie jest z nimi powiązany. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

Planimetria: okręgi, kąty w okręgu, wielokąty – najważniejsze wiadomości

Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka

KARTA 1/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Okrąg i koło.** Okrąg o środku O i promieniu r to zbiór punktów odległych od O o r; średnica ma długość $2r$. Długość okręgu: $L = 2\pi r$, pole koła: $P = \pi r^2$. **Cięciwa** to odcinek łączący dwa punkty okręgu; najdłuższą cięciwą jest średnica.
- **Cięciwa i jej odległość od środka.** Prosta przechodząca przez środek okręgu i prostopadła do cięciwy dzieli tę cięciwę na połowy (to symetralna cięciwy). Jeśli cięciwa o długości c leży w odległości d od środka, to z twierdzenia Pitagorasa $d^2 + (\frac{c}{2})^2 = r^2$.
- **Styczna.** Gdy odległość środka okręgu od prostej jest mniejsza od r, prosta jest sieczną (2 punkty wspólne), gdy jest równa r – styczną (1 punkt wspólny), gdy jest większa – prosta i okrąg nie mają punktów wspólnych. Styczna jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności. Odcinki stycznych poprowadzonych z punktu P są równe: $|PA| = |PB|$, a z twierdzenia Pitagorasa $|PA|^2 + r^2 = |PO|^2$.
- **Kąty w okręgu.** Kąt środkowy ma wierzchołek w środku okręgu, kąt wpisany – na okręgu, a jego ramiona zawierają cięciwy. Kąt wpisany ma miarę równą połowie miary kąta środkowego opartego na tym samym łuku. Kąty wpisane oparte na tym samym łuku (albo na równych łukach) są równe. Kąt wpisany oparty na półokręgu jest prosty.
- **Łuk i wycinek.** Dla kąta środkowego o mierze α (w stopniach): długość łuku $l = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$, pole wycinka koła $P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$. Łuk to „brzeg” wycinka.
- **Wielokąty foremne** mają wszystkie boki równe i wszystkie kąty równe. Suma kątów wewnętrznych n-kąta wypukłego to $(n-2) \cdot 180^\circ$, więc kąt wewnętrzny n-kąta foremnego ma miarę $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$. Liczba przekątnych n-kąta: $\frac{n(n-3)}{2}$. Sześciokąt foremny o boku a składa się z 6 trójkątów równobocznych: promień okręgu opisanego to a, dłuższa przekątna – $2a$, krótsza – $a\sqrt{3}$. Przekątna kwadratu o boku a ma długość $a\sqrt{2}$.
- **Czworokąty.** Równoległobok: przeciwległe boki i kąty są równe, kąty przy jednym boku dają razem 180°, przekątne dzielą się na połowy. Prostokąt: przekątne są równe. Romb: przekątne są prostopadłe, dzielą się na połowy i zawierają dwusieczne kątów; pole $\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$. Trapez: kąty przy każdym ramieniu dają razem 180°; w trapezie równoramiennym kąty przy podstawie są równe. Przekątne równoległoboku na ogół **nie** są prostopadłe.

- Warunki dla czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu to zakres rozszerzony. W karcie wzorów CKE są: długość łuku, pole wycinka, kąty w okręgu, twierdzenie o odcinkach stycznych, pola czworokątów. Jest tam też twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą – od 2024 r. nie ma go w wymaganiach. Nie ma wzoru na sumę kątów wielokąta ani na liczbę przekątnych.

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. Cięciwa okręgu o promieniu 13 ma długość 24. Oblicz odległość tej cięciwy od środka okręgu.

Odcinek OS poprowadzony ze środka prostopadle do cięciwy AB dzieli ją na połowy: $|AS| = 12$.

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie OSA: $d^2 + 12^2 = 13^2$, $d^2 = 25$, $d = 5$.

Przykład 2. Z punktu *P* odległego o 17 od środka *O* okręgu o promieniu 8 poprowadzono styczne *PA* i *PB* (*A*, *B* – punkty styczności). Oblicz |*PA*| oraz obwód i pole czworokąta *PAOB*.

Styczna jest prostopadła do promienia, więc trójkąt OAP jest prostokątny:
$|PA| = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = 15$.

Odcinki stycznych są równe: $|PB| = 15$. Obwód: $15 + 15 + 8 + 8 = 46$.

Czworokąt składa się z dwóch przystających trójkątów prostokątnych: pole $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 15 = 120$.

Przykład 3. Punkty *A*, *B*, *C* leżą na okręgu o środku *O*, kąt środkowy *AOB* ma miarę 110°, a punkt *C* leży na dłuższym łuku *AB*. Oblicz miary kątów *ACB* i *OAB*.

Kąt wpisany ACB i kąt środkowy AOB są oparte na tym samym łuku, więc
$|\sphericalangle ACB| = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$.

Trójkąt AOB jest równoramienny ($|OA| = |OB| = r$), więc $|\sphericalangle OAB| = \frac{180^\circ - 110^\circ}{2} = 35^\circ$.

Przykład 4. Oblicz długość łuku i pole wycinka koła o promieniu 6, wyznaczonych przez kąt środkowy o mierze 150°.

$l = \frac{150^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6 = \frac{5}{12} \cdot 12\pi = 5\pi$.

$P = \frac{150^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 36 = \frac{5}{12} \cdot 36\pi = 15\pi$.

Przykład 5. Kąt wewnętrzny wielokąta foremnego ma miarę 140°. Ile boków i ile przekątnych ma ten wielokąt?

$\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = 140^\circ$, więc $180n - 360 = 140n$, $40n = 360$, $n = 9$.

Sposób II: kąt zewnętrzny ma $180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$, a suma kątów zewnętrznych to 360°, więc $n = 9$.

Przekątne: $\frac{9 \cdot 6}{2} = 27$.

ZADANIA

Zadanie 1. Uzupełnij. ___ / 4 pkt

1. Kąt wpisany oparty na tym samym łuku co kąt środkowy o mierze 84° ma miarę _____ .
2. Kąt wewnętrzny ośmiokąta foremnego ma miarę _____ .
3. Długość okręgu o promieniu 5 jest równa _____ .
4. Cięciwa o długości 16 w okręgu o promieniu 10 leży w odległości _____ od środka okręgu.

Zadanie 2. Przekątne rombu mają długości 10 i 24. Bok tego rombu ma długość ___ / 1 pkt

A. 17 **B.** 12 **C.** 26 **D.** 13

Zadanie 3. Oceń, czy zdanie jest prawdziwe (P), czy fałszywe (F). ___ / 3 pkt

1. Każdy kąt wpisany oparty na półokręgu jest prosty.	**P**	**F**
2. Przekątne każdego równoległoboku są prostopadłe.	**P**	**F**
3. Przekątne każdego prostokąta mają równe długości.	**P**	**F**

Podgląd • Pierwsza Ławka

Planimetria: okręgi, kąty w okręgu, wielokąty – ćwiczenia

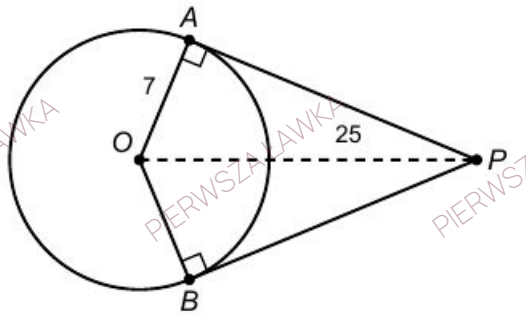
KARTA 2/9

Ćwiczę umiejętności z działu

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 22 pkt

Zadanie 1. Cięciwa okręgu o promieniu 17 leży w odległości 8 od środka tego okręgu. Oblicz długość tej cięciwy. ___ / 2 pkt

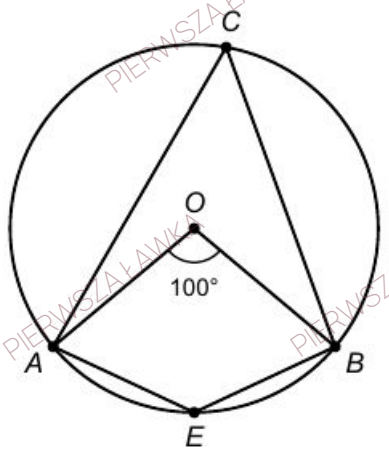
Zadanie 2. Z punktu *P* poprowadzono styczne *PA* i *PB* do okręgu o środku *O* i promieniu 7 (*A*, *B* – punkty styczności). Punkt *P* jest odległy od środka okręgu o 25 (zobacz rysunek). Oblicz |*PA*| oraz obwód i pole czworokąta *PAOB*. ___ / 3 pkt



Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 3. Punkty *A*, *B*, *C*, *E* leżą na okręgu o środku *O*. Kąt środkowy *AOB* zaznaczony na rysunku ma miarę 100°. Punkt *C* leży na dłuższym łuku *AB*, a punkt *E* – na krótszym. Uzupełnij.

___ / 3 pkt



1. $|\sphericalangle ACB| =$ _____
2. $|\sphericalangle OAB| =$ _____
3. $|\sphericalangle AEB| =$ _____

Zadanie 4. Łuk okręgu o promieniu 12 ma długość 8π. Oblicz miarę kąta środkowego opartego na tym łuku oraz pole odpowiedniego wycinka koła.

___ / 2 pkt

Zadanie 5. Dopasuj do każdego wielokąta foremnego (1–4) miarę jego kąta wewnętrznego (a–e). Jedna miara nie pasuje do żadnego wielokąta.

___ / 4 pkt

1. trójkąt równoboczny	a) 108°
2. pięciokąt foremny	b) 150°
3. sześciokąt foremny	c) 60°
4. dziesięciokąt foremny	d) 144°
	e) 120°

1 ____ 2 ____ 3 ____ 4 ____

Podgląd • Pierwsza Ławka

Planimetria: okręgi, kąty w okręgu, wielokąty – zadania typu maturalnego

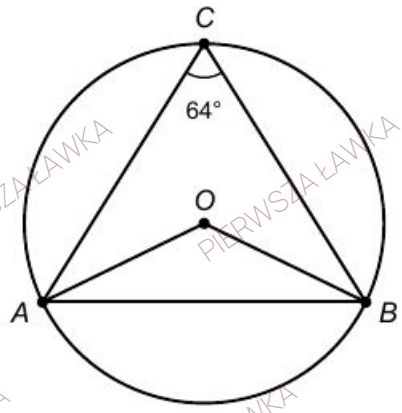
Polecenia i punktacja jak na maturze 2027

KARTA 3/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 11 pkt

Zadanie 1. Punkty *A*, *B*, *C* leżą na okręgu o środku *O*. Kąt wpisany *ACB* ma miarę 64° (zobacz rysunek).
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Miara kąta *OAB* jest równa

___ / 1 pkt



A. 32° **B.** 26° **C.** 52° **D.** 64°

Zadanie 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Kąt wewnętrzny wielokąta foremnego ma miarę 156°. Liczba boków tego wielokąta jest równa

___ / 1 pkt

A. 15 **B.** 24 **C.** 13 **D.** 18

Zadanie 3. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Pole wycinka koła o promieniu 9, wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze 40°, jest równe

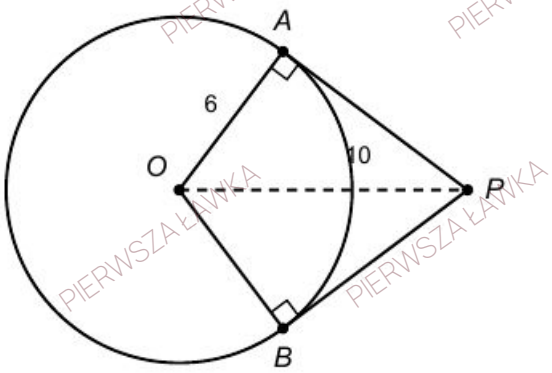
___ / 1 pkt

A. 18π **B.** $4{,}5\pi$ **C.** 9π **D.** 2π

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 4. Z punktu *P* poprowadzono styczne *PA* i *PB* do okręgu o środku *O* i promieniu 6 (*A*, *B* – punkty styczności). Odległość punktu *P* od środka okręgu jest równa 10 (zobacz rysunek). Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

___ / 1 pkt



1. Odcinek *PA* ma długość 8.	**P**	**F**
2. Pole czworokąta *PAOB* jest równe 24.	**P**	**F**

Zadanie 5. Sześciokąt foremny ma bok długości 5.
Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

___ / 2 pkt

1. Dłuższa przekątna tego sześciokąta ma długość _____ .
2. Krótsza przekątna tego sześciokąta ma długość _____ .

Zadanie 6. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Kąt ostry rombu ma miarę 50°. Kąt między krótszą przekątną tego rombu a jego bokiem ma miarę

___ / 1 pkt

A. 65° **B.** 50° **C.** 130° **D.** 25°

Zadanie 7. W okręgu o promieniu 10 poprowadzono dwie równoległe cięciwy o długościach 16 i 12, leżące po przeciwnych stronach środka okręgu. Oblicz odległość między tymi cięciwami. Zapisz obliczenia.

___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

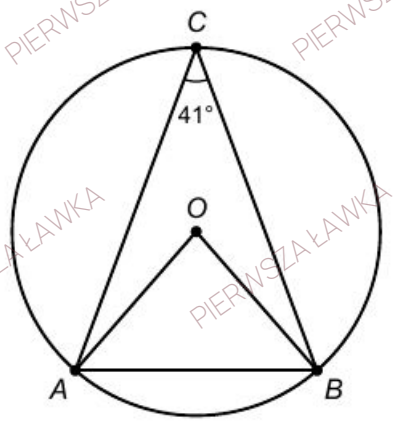
Kartkówka 1: cięciwy, styczne i kąty w okręgu – grupa A

KARTA 4/9

15 minut · 8 pkt

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

Zadanie 1. Punkty *A*, *B*, *C* leżą na okręgu o środku *O*. Kąt wpisany *ACB* ma miarę 41° (zobacz rysunek).
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Miara kąta *OBA* jest równa ___ / 1 pkt



A. 98° **B.** 49° **C.** 41° **D.** 82°

Zadanie 2. Cięciwa okręgu o promieniu 25 ma długość 48. Oblicz odległość tej cięciwy od środka okręgu. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

PIERWSZA ŁAWKA

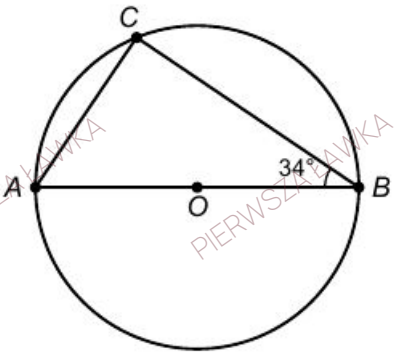
Sprawdzian: Planimetria: okręgi, kąty w okręgu, wielokąty – grupa A

45 minut · 20 pkt

KARTA 8/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 20 pkt

Zadanie 1. Odcinek *AB* jest średnicą okręgu, a punkt *C* leży na tym okręgu. Kąt *ABC* ma miarę 34° (zobacz rysunek).
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Miara kąta *BAC* jest równa ___ / 1 pkt



A. 56° **B.** 68° **C.** 34° **D.** 146°

Zadanie 2. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Suma miar kątów wewnętrznych wielokąta wypukłego jest równa 1440°. Liczba boków tego wielokąta jest równa ___ / 1 pkt

A. 8 **B.** 10 **C.** 9 **D.** 12

Zadanie 3. Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Długość łuku okręgu o promieniu 18, wyznaczonego przez kąt środkowy o mierze 50°, jest równa ___ / 1 pkt

A. 45π **B.** 2,5π **C.** 5π **D.** 10π

Zadanie 4. Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Przekątne każdego rombu zawierają dwusieczne jego kątów.	**P**	**F**
2. Każdy równoległobok o równych przekątnych jest rombem.	**P**	**F**

Zadanie 5. Kwadrat o boku 6 jest wpisany w okrąg.
Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe. ___ / 2 pkt

1. Promień tego okręgu jest równy _____ .
2. Pole koła ograniczonego tym okręgiem jest równe _____ .

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Planimetria: okręgi, kąty w okręgu, wielokąty – kartkówki, sprawdzian i karty pracy z powtórką, matematyka, klasa 2 LO i technikum (zakres

Podgląd pokazał 11 z 36 stron. Pełna wersja: 36 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Planimetria: okręgi, kąty w okręgu, wielokąty – najważniejsze wiadomości – 3 zadania, 8 pkt
- Karta 2: Planimetria: okręgi, kąty w okręgu, wielokąty – ćwiczenia – 8 zadań, 22 pkt
- Karta 3: Planimetria: okręgi, kąty w okręgu, wielokąty – zadania typu maturalnego – 8 zadań, 11 pkt
- Karta 4: Kartkówka 1: cięciwy, styczne i kąty w okręgu – grupa A – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 5: Kartkówka 1: cięciwy, styczne i kąty w okręgu – grupa B – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 6: Kartkówka 2: łuki, wycinki, wielokąty foremne i czworokąty – grupa A – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 7: Kartkówka 2: łuki, wycinki, wielokąty foremne i czworokąty – grupa B – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 8: Sprawdzian: Planimetria: okręgi, kąty w okręgu, wielokąty – grupa A – 10 zadań, 20 pkt
- Karta 9: Sprawdzian: Planimetria: okręgi, kąty w okręgu, wielokąty – grupa B – 10 zadań, 20 pkt
Karta 1 przypomina teorię i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku.

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail
pierwszalawka.pl/material/matematyka-liceum-klasa-2-dzial-06-planimetria-okregi-katy-w-okregu-wielokaty