PIERWSZA ŁAWKA · ZESTAW DZIAŁOWY · MATEMATYKA · KLASA 3 LO I TECHNIKUM · ZAKRES PODSTAWOWY

Dział 3. Ciągi: wzór ogólny, rekurencja, monotoniczność, ciąg arytmetyczny

Wyrazy ciągu ze wzoru ogólnego i rekurencyjnego, ciągi niemonotoniczne, badanie monotoniczności (znak różnicy kolejnych wyrazów), sprawdzanie, czy ciąg jest arytmetyczny, wzór na n-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, trzy kolejne wyrazy, zadania z kontekstem: raty malejące, rzędy w amfiteatrze, oszczędzanie. Dziewięć kart: teoria z przykładami, ćwiczenia, zadania typu maturalnego, dwie kartkówki (A i B) i sprawdzian (A i B) – z kluczem i zasadami oceniania.

Karta	Temat	Zadania
1	**Ciągi: wzór ogólny, rekurencja, monotoniczność, ciąg arytmetyczny – najważniejsze wiadomości** Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka	3 zad. 8 pkt
2	**Ciągi: wzór ogólny, rekurencja, monotoniczność, ciąg arytmetyczny – ćwiczenia** Ćwiczę umiejętności z działu	8 zad. 23 pkt
3	**Ciągi: wzór ogólny, rekurencja, monotoniczność, ciąg arytmetyczny – zadania typu maturalnego** Polecenia i punktacja jak na maturze 2027	8 zad. 12 pkt
4	**Kartkówka 1: wzór ogólny, rekurencja, monotoniczność – grupa A** 15 minut · 9 pkt	4 zad. 9 pkt
5	**Kartkówka 1: wzór ogólny, rekurencja, monotoniczność – grupa B** 15 minut · 9 pkt	4 zad. 9 pkt
6	**Kartkówka 2: ciąg arytmetyczny – grupa A** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
7	**Kartkówka 2: ciąg arytmetyczny – grupa B** 15 minut · 8 pkt	4 zad. 8 pkt
8	**Sprawdzian: Ciągi: wzór ogólny, rekurencja, monotoniczność, ciąg arytmetyczny – grupa A** 45 minut · 21 pkt	10 zad. 21 pkt

9	**Sprawdzian: Ciągi: wzór ogólny, rekurencja, monotoniczność, ciąg arytmetyczny – grupa B** 45 minut · 21 pkt	10 zad. 21 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Karta 1 przypomina najważniejsze wiadomości z działu i pokazuje przykłady rozwiązane krok po kroku – od niej warto zacząć.
- Karta 2 to ćwiczenia, a karta 3 – zadania w formule matury 2027 (polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE).
- Karty 4–7 to dwie kartkówki (po 15 minut), każda w grupach A i B. Karty 8–9 to sprawdzian (45 minut) w grupach A i B – te same typy zadań i ta sama punktacja, inne liczby.
- Klucz na końcu zestawu zawiera odpowiedzi, przykładowe rozwiązania i zasady oceniania zadań otwartych w stylu CKE (kamienie milowe, błąd rachunkowy = −1 pkt).
- Osobny plik „Powtórka” zbiera definicje, wzory (z zaznaczeniem, które są w karcie wzorów CKE), typowe błędy i test „Sprawdź się”.

Materiał oryginalny. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: VI.1–VI.5, VI.7 (w tle III.3, III.4); cele ogólne I, III.2, IV.1; dowody PP pkt 5. Miejsce w seriach podręczników: NE kl. 3 · Pazdro kl. 3 · GWO kl. 3 · technikum NE kl. 4. Nazwy wydawnictw i serii podano tylko informacyjnie – materiał nie jest z nimi powiązany. Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

Ciągi: wzór ogólny, rekurencja, monotoniczność, ciąg arytmetyczny – najważniejsze wiadomości

Teoria w pigułce, przykłady rozwiązane krok po kroku, rozgrzewka

KARTA 1/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 8 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Ciąg liczbowy** to funkcja określona na zbiorze liczb naturalnych dodatnich: liczbie n przyporządkowujemy **wyraz** a_n. **Wzór ogólny** pozwala obliczyć dowolny wyraz, np. dla $a_n = n^2 - 4n$: $a_1 = 1 - 4 = -3$, $a_5 = 25 - 20 = 5$. Wykres ciągu to oddzielne punkty (n, a_n) – nie łączymy ich linią.
- **Ciąg rekurencyjny** ma podany pierwszy wyraz i przepis na następny wyraz z poprzedniego, np. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 3$: $a_2 = 5$, $a_3 = 13$, $a_4 = 29$. Wyrazy liczymy po kolei (tabelka: n | a_n). Poza ciągami arytmetycznymi i geometrycznymi są też inne ciągi – ten ciąg nie jest ani arytmetyczny, ani geometryczny.
- **Monotoniczność.** Ciąg jest **rosnący**, gdy $a_{n+1} > a_n$ dla każdego $n \geq 1$, **malejący**, gdy $a_{n+1} < a_n$, **stały**, gdy $a_{n+1} = a_n$ (są też ciągi niemalejące i nierosnące). Badamy **znak różnicy** $a_{n+1} - a_n$: dla $a_n = 5 - 2n$ mamy $a_{n+1} - a_n = -2 < 0$, więc ciąg jest malejący. Wiele ciągów **nie jest monotonicznych**, np. $a_n = (-1)^n \cdot n$: $-1, 2, -3, 4, \ldots$
- **Ciąg arytmetyczny** – każdy wyraz (od drugiego) powstaje z poprzedniego przez dodanie tej samej liczby r (**różnicy**): $a_{n+1} - a_n = r$. Wzór na n-ty wyraz: $a_n = a_1 + (n-1)r$; ogólniej $a_n = a_k + (n-k)r$. Gdy $r > 0$ – ciąg rosnący, $r < 0$ – malejący, $r = 0$ – stały. Wzór ogólny ciągu arytmetycznego jest liniowy: $a_n = rn + b$.
- **Trzy kolejne wyrazy** x, y, z ciągu arytmetycznego: środkowy jest średnią arytmetyczną sąsiadów, $y = \frac{x+z}{2}$, czyli $2y = x + z$. Tym warunkiem sprawdzamy też, czy trzy liczby (w podanej kolejności) tworzą ciąg arytmetyczny.
- **Suma n początkowych wyrazów** ciągu arytmetycznego: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$. Skąd wzór: zapisujemy sumę „od przodu” i „od tyłu” i dodajemy – każda para daje $a_1 + a_n$, a par jest n; np. $1 + 2 + \ldots + 100 = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$.
- **Suma a wyraz, liczba wyrazów.** S_n to suma (np. kwota całej pożyczki), a a_n – pojedynczy wyraz (np. jedna rata). Od a_k do a_m jest $m - k + 1$ wyrazów. W zadaniach z treścią ustal najpierw: co jest a_1, jaki jest znak r, ile jest wyrazów.

- **Karta wzorów CKE** (dział „Ciągi”) zawiera: $a_n = a_1 + (n-1)r$, oba wzory na S_n i $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$. Definicji monotoniczności i sposobu jej badania w karcie nie ma – trzeba je znać.

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = n^2 - 6n + 5$ dla $n \geq 1$. Oblicz trzy początkowe wyrazy. Ile wyrazów tego ciągu jest ujemnych?

$a_1 = 1 - 6 + 5 = 0$, $a_2 = 4 - 12 + 5 = -3$, $a_3 = 9 - 18 + 5 = -4$.

$a_n = (n-1)(n-5)$. Nierówność $(n-1)(n-5) < 0$ zachodzi dla $1 < n < 5$, czyli dla $n \in \{2, 3, 4\}$. Ujemne są 3 wyrazy: a_2, a_3, a_4.

Przykład 2. Ciąg jest określony rekurencyjnie: $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n - 1$. Oblicz a_2, a_3, a_4. Czy ten ciąg jest arytmetyczny?

$a_2 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$, $a_3 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$, $a_4 = 2 \cdot 9 - 1 = 17$.

Różnice: $5 - 3 = 2$, $9 - 5 = 4$ – nie są równe, więc ciąg nie jest arytmetyczny (wystarczy jedna para różnych różnic).

Przykład 3. Zbadaj monotoniczność ciągów: a) $a_n = 7 - 3n$; b) $b_n = n^2 - 4n$.

a) $a_{n+1} - a_n = 7 - 3(n+1) - (7 - 3n) = -3 < 0$ dla każdego n – ciąg malejący (arytmetyczny, $r = -3$).

b) $b_{n+1} - b_n = (n+1)^2 - 4(n+1) - n^2 + 4n = 2n - 3$. Dla $n = 1$ różnica jest ujemna, dla $n \geq 2$ – dodatnia: $b_1 = -3$, $b_2 = -4$, $b_3 = -3$. Ciąg nie jest monotoniczny.

Przykład 4. W ciągu arytmetycznym $a_4 = 11$ i $a_{10} = 29$. Oblicz a_{20} i sumę dwudziestu początkowych wyrazów.

Od a_4 do a_{10} jest 6 „kroków”: $a_{10} = a_4 + 6r$, więc $6r = 18$, $r = 3$. Stąd $a_1 = a_4 - 3r = 2$.

$a_{20} = 2 + 19 \cdot 3 = 59$, $S_{20} = \frac{2 + 59}{2} \cdot 20 = 610$.

Przykład 5. Pożyczkę 6300 zł spłacono w 14 ratach. Każda kolejna rata była o 20 zł mniejsza od poprzedniej. Oblicz pierwszą i ostatnią ratę.

Raty tworzą ciąg arytmetyczny: $n = 14$, $r = -20$ (raty maleją!), a 6300 zł to **suma** rat: $S_{14} = 6300$.

$\frac{2a_1 + 13 \cdot (-20)}{2} \cdot 14 = 6300$, czyli $7(2a_1 - 260) = 6300$, $2a_1 - 260 = 900$, $a_1 = 580$ zł.

$a_{14} = 580 - 13 \cdot 20 = 320$ zł. Sprawdzenie: $\frac{580 + 320}{2} \cdot 14 = 6300$. Pierwsza rata: 580 zł, ostatnia: 320 zł.

Podgląd • Pierwsza Ławka

Ciągi: wzór ogólny, rekurencja, monotoniczność, ciąg arytmetyczny – ćwiczenia

KARTA 2/9

Ćwiczę umiejętności z działu

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 23 pkt

Zadanie 1. Ciągi są określone rekurencyjnie: $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = a_n^2 - 3 \end{cases}$ **oraz** $\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = b_n + 2n \end{cases}$ **dla** $n \geq 1$.

Oblicz wyrazy. ___ / 4 pkt

1. a_2 = _____
2. a_3 = _____
3. a_4 = _____
4. b_4 = _____

Zadanie 2. a) Oblicz, ile wyrazów ciągu $a_n = 40 - 3n$ jest dodatnich. b) Który wyraz ciągu $b_n = n^2 - 2n - 15$ jest równy 20? ___ / 3 pkt

Zadanie 3. Wskaż ciąg rosnący. ___ / 1 pkt

A. $a_n = (n-3)^2$

B. $a_n = 12 - n$

C. $a_n = 4n - 9$

D. $a_n = (-1)^n \cdot n$

Zadanie 4. Zbadaj monotoniczność ciągów: a) $a_n = n^2 + 2n$; b) $b_n = 10 - n^2$; c) $c_n = n^2 - 5n$. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadanie 5. Oceń, czy ciąg określony podanym wzorem jest arytmetyczny. Wybierz P (tak) albo F (nie). ___ / 3 pkt

1. $a_n = 5 - 4n$	**P**	**F**
2. $a_n = n^2 + 1$	**P**	**F**
3. $a_n = \frac{3n + 1}{2}$	**P**	**F**

Zadanie 6. W ciągu arytmetycznym (a_n) trzeci wyraz jest równy 7, a ósmy jest równy −8. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu i oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów. ___ / 3 pkt

Zadanie 7. W pierwszym rzędzie amfiteatru są 24 miejsca, a w każdym następnym rzędzie – o 3 miejsca więcej niż w poprzednim. Amfiteatr ma 16 rzędów. Oblicz liczbę wszystkich miejsc. W którym rzędzie są 54 miejsca? ___ / 3 pkt

Zadanie 8. Ola oszczędza: w pierwszym tygodniu odłożyła 15 zł, a w każdym następnym tygodniu – o 5 zł więcej niż w poprzednim. Po ilu tygodniach łączna odłożona kwota wyniesie 840 zł? Ile Ola odłoży w ostatnim z tych tygodni? ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Ciągi: wzór ogólny, rekurencja, monotoniczność, ciąg arytmetyczny – zadania typu maturalnego

KARTA 3/9

Polecenia i punktacja jak na maturze 2027

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 12 pkt

Zadanie 1. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = (-1)^n \cdot (n^2 - 1)$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyraz a_5 jest równy ___ / 1 pkt

A. −26 **B.** 24 **C.** 26 **D.** −24

Zadanie 2. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie: $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = 3 - 2a_n \end{cases}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Czwarty wyraz ciągu (a_n) jest równy ___ / 1 pkt

A. 5 **B.** 17 **C.** −7 **D.** 13

Zadanie 3. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 11 - 4n$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Ciąg (a_n) jest malejący.	**P**	**F**
2. Ciąg (a_n) ma dokładnie trzy wyrazy dodatnie.	**P**	**F**

Zadanie 4. W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, $a_2 = 9$ oraz $a_6 = -3$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyraz a_{12} jest równy ___ / 1 pkt

A. 21 **B.** −18 **C.** −21 **D.** −24

Zadanie 5. Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy −7, a różnica jest równa 4.

Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe. ___ / 2 pkt

1. Suma dwunastu początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa _____ .
2. Liczba 89 jest wyrazem ciągu (a_n) o numerze _____ .

Podgląd • Pierwsza Ławka

Kartkówka 1: wzór ogólny, rekurencja, monotoniczność – grupa A

15 minut · 9 pkt

KARTA 4/9

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 9 pkt

Zadanie 1. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = n^2 - 5n + 2$ dla $n \geq 1$. Oblicz. ___ / 3 pkt

1. a_1 = _____ 2. a_4 = _____ 3. a_7 = _____

Zadanie 2. Ciąg jest określony wzorami: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 4 - a_n^2$ dla $n \geq 1$. Trzeci wyraz tego ciągu jest równy ___ / 1 pkt

A. 4 **B.** −12 **C.** 2 **D.** 0

Zadanie 3. Zbadaj, czy ciąg $a_n = 3n^2 - n$ jest rosnący, czy malejący. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 4. Oblicz, ile wyrazów ciągu $a_n = 50 - 4n$ jest dodatnich. Zapisz obliczenia. ___ / 2 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Sprawdzian: Ciągi: wzór ogólny, rekurencja, monotoniczność, ciąg arytmetyczny – grupa A

KARTA 8/9

45 minut · 21 pkt

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 21 pkt

Zadanie 1. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = (n - 4)(2n + 1)$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wyraz a_6 jest równy ___ / 1 pkt

A. 13 **B.** −26 **C.** 26 **D.** 39

Zadanie 2. Ciąg jest określony rekurencyjnie: $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n - n \end{cases}$ **dla $n \geq 1$.**
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Czwarty wyraz tego ciągu jest równy ___ / 1 pkt

A. 12 **B.** 9 **C.** 4 **D.** 10

Zadanie 3. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 9 - 5n$ dla $n \geq 1$.
Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe. ___ / 1 pkt

1. Ciąg (a_n) jest rosnący.	**P**	**F**
2. Ciąg (a_n) jest arytmetyczny o różnicy −5.	**P**	**F**

Zadanie 4. W ciągu arytmetycznym (a_n) wyraz piąty jest równy 14, a wyraz dziewiąty jest równy 30.
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
Wyraz a_{20} jest równy ___ / 1 pkt

A. 70 **B.** 80 **C.** 78 **D.** 74

Zadanie 5. Ciąg arytmetyczny (a_n) ma pierwszy wyraz równy 6 i różnicę równą −4.
Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe. ___ / 3 pkt

1. Suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa _____ .
2. Liczba −54 jest wyrazem tego ciągu o numerze _____ .
3. Dwudziesty wyraz tego ciągu jest równy _____ .

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Ciągi: wzór ogólny, rekurencja, monotoniczność, ciąg arytmetyczny – kartkówki, sprawdzian i karty pracy z powtórką, matematyka, klasa 3 LO i...

Podgląd pokazał 9 z 29 stron. Pełna wersja: 29 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- Karta 1: Ciągi: wzór ogólny, rekurencja, monotoniczność, ciąg arytmetyczny – najważniejsze wiadomości – 3 zadania, 8 pkt
- Karta 2: Ciągi: wzór ogólny, rekurencja, monotoniczność, ciąg arytmetyczny – ćwiczenia – 8 zadań, 23 pkt
- Karta 3: Ciągi: wzór ogólny, rekurencja, monotoniczność, ciąg arytmetyczny – zadania typu maturalnego – 8 zadań, 12 pkt
- Karta 4: Kartkówka 1: wzór ogólny, rekurencja, monotoniczność – grupa A – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 5: Kartkówka 1: wzór ogólny, rekurencja, monotoniczność – grupa B – 4 zadania, 9 pkt
- Karta 6: Kartkówka 2: ciąg arytmetyczny – grupa A – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 7: Kartkówka 2: ciąg arytmetyczny – grupa B – 4 zadania, 8 pkt
- Karta 8: Sprawdzian: Ciągi: wzór ogólny, rekurencja, monotoniczność, ciąg arytmetyczny – grupa A – 10 zadań, 21 pkt
- Karta 9: Sprawdzian: Ciągi: wzór ogólny, rekurencja, monotoniczność, ciąg arytmetyczny – grupa B – 10 zadań, 21 pkt Karta 1 przypomina teorię i pokazuje przykłady rozwiązane krok p

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matematyka-liceum-klasa-3-dzial-03-ciagi-wzor-ogolny-rekurencja-monotoniczność-ciąg