PIERWSZA ŁAWKA · 40 ZADAŃ Z JEDNEGO TEMATU · PR · MATEMATYKA · MATURA 2027 · POZIOM ROZSZERZONY

Geometria analityczna: okręgi, styczne, wektory – 40 zadań

Geometria analityczna na poziomie rozszerzonym: równanie okręgu, punkty wspólne prostej i okręgu oraz dwóch okręgów, styczne do okręgu, wektory i ich działania, środek odcinka, symetrie, pola wielokątów w układzie, okręgi wpisane i opisane, zadania z parametrem dla prostej i okręgu oraz dowody w układzie współrzędnych („Wykaż, że…"). 40 zadań otwartych w formule matury rozszerzonej 2027 (2–6 pkt, razem 152 pkt).

Karta	Temat	Zadania
1	**Ściąga: Geometria analityczna: okręgi, styczne, wektory. Pierwsze kroki** krótkie zadania za 2 pkt: okrąg o danej średnicy, równoległobok i wektory, prosta prostopadła, punkty wspólne prostej i okręgu, symetria okręgu, prosty dowód	7 zad. 14 pkt
2	**Jedna myśl, trzy kroki** zadania za 3 pkt: okrąg przez dwa punkty, styczna w punkcie, cięciwa, wektory, prostopadłość z parametrem, dowód o prostej i okręgu, pole trójkąta	7 zad. 21 pkt
3	**Styczne i okręgi** zadania za 3–4 pkt: punkty wspólne dwóch okręgów, okrąg styczny do osi, dowód wektorowy, styczne równoległe i z punktu, okrąg styczny do prostej, pole czworokąta	7 zad. 25 pkt
4	**Cztery kroki** zadania za 4 pkt: styczność okręgów z parametrem, wspólna cięciwa, okręgi opisany i wpisany, prosta i okrąg z parametrem, dowód z wektorami, symetria środkowa	7 zad. 28 pkt
5	**Zadania na 5 punktów** zadania za 5 pkt: styczne i pole, okrąg styczny do prostej, okręgi z parametrem, cięciwa danej długości, okręgi styczne do osi, dowód warunku styczności	6 zad. 30 pkt
6	**Poziom końca arkusza** zadania za 5–6 pkt: przypadki, największe pole, pole z parametrem, styczne prostopadłe, okręgi wpisany i opisany, minimum sumy kwadratów	6 zad. 34 pkt

JAK KORZYSTAĆ Z ZESTAWU

- Klucz na końcu: odpowiedzi, zasady oceniania etapami jak w CKE, pełne rozwiązania.

Zadania oryginalne. Podstawa programowa LO i technikum w brzmieniu z 2024 r. (Dz.U. 2024 poz. 1019). Wymagania: IX.3–IX.5, IX.R1–IX.R4 (+ VIII.1, VIII.10, cel IV). Do użytku własnego i pracy z własnymi uczniami.

Ściąga: Geometria analityczna: okręgi, styczne, wektory. Pierwsze kroki

krótkie zadania za 2 pkt: okrąg o danej średnicy, równoległobok i wektory, prosta prostopadła, punkty wspólne prostej i okręgu, symetria okręgu, prosty dowód

KARTA 1/6

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 14 pkt

PRZYPOMNIJ SOBIE

- **Okrąg i prosta.** Okrąg o środku $S = (a, b)$ i promieniu r: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ – po prawej stronie jest *kwadrat promienia* (nie średnica!). Postaci ogólnej $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ w podstawie 2024 już nie ma (karta wzorów z 2022 r. ją jeszcze podaje) – zadania układa się tak, by wystarczyła postać kanoniczna. **Punkty wspólne prostej i okręgu:** podstaw y (albo x) z równania prostej do równania okręgu i rozwiąż równanie kwadratowe: $\Delta > 0$ – dwa punkty, $\Delta = 0$ – *styczna* (jeden punkt), $\Delta < 0$ – brak. Prostą pionową $x = c$ rozpatrz osobno.
- **Dwa okręgi** o środkach S_1, S_2, promieniach r_1, r_2 i $d = |S_1S_2|$: $d > r_1 + r_2$ – rozłączne zewnętrznie; $d = r_1 + r_2$ – styczne zewnętrznie; $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$ – dwa punkty wspólne; $d = |r_1 - r_2|$ – styczne wewnętrznie; $d < |r_1 - r_2|$ – jeden wewnątrz drugiego. **Punkty wspólne:** odejmij równania okręgów stronami – otrzymasz równanie prostej przez punkty wspólne; potem jak w punkcie 1.
- **Prostopadłość i styczna.** Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe, gdy $a_1a_2 = -1$. Styczna do okręgu w punkcie T jest prostopadła do promienia ST: współczynnik kierunkowy $-\frac{1}{a_{ST}}$. **Styczne z punktu *P* spoza okręgu:** $y = a(x - x_P) + y_P$, podstaw do okręgu, żądaj $\Delta = 0$ – dostajesz równanie na a (dwa rozwiązania); sprawdź osobno prostą pionową. **Styczna równoległa do danej prostej:** $y = ax + b$ z gotowym a, warunek $\Delta = 0$ daje b.
- **Czego nie ma w wymaganiach:** odległości punktu od prostej (usunięta z podstawy w 2024 r.; karta wzorów z 2022 r. nadal podaje ten wzór, ale zadania układa się tak, by nie był potrzebny). Zamiast niego: spodek prostopadłej (przecięcie prostej z prostą prostopadłą przez punkt), pole trójkąta i wysokość $h = \frac{2P}{a}$, twierdzenie Pitagorasa dla cięciwy ($d^2 = r^2 - (\frac{|AB|}{2})^2$) albo warunek $\Delta = 0$.
- **Cięciwa.** Prosta $y = kx + m$ przecina okrąg w punktach o odciętych x_1, x_2 (pierwiastki równania kwadratowego): $|AB|^2 = (1 + k^2)(x_1 - x_2)^2$, gdzie $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \frac{\Delta}{A^2}$ (wzory Viète'a). Dla prostej pionowej – różnica rzędnych.

- **Wektory.** $\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$; $k\vec{u} + l\vec{v}$ liczysz po współrzędnych. Równoległobok $ABCD$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Jeśli $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$, to $P = A + k\overrightarrow{AB}$. Środek odcinka AB: $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.
- **Pola i symetrie.** Pole trójkąta ABC w układzie współrzędnych: $P = \frac{1}{2}|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$. Symetria względem osi Ox: $(x, y) \to (x, -y)$; względem osi Oy: $(x, y) \to (-x, y)$; względem początku: $(x, y) \to (-x, -y)$. Obraz okręgu to okrąg o tym samym promieniu i obrazie środka.
- **Wzorzec zapisu i uwagi CKE.** Dane i oznaczenia → równanie (podstawienie) → warunek (Δ, długość, pole) → rozwiązanie z odrzuceniem sprzecznych → odpowiedź. Częste błędy: r zamiast r^2; zły znak w środku okręgu; pominięta prosta pionowa; $\Delta \geq 0$ zamiast $\Delta > 0$. **Dowód:** współrzędne ogólne (a_1, a_2, …), nie liczby – sprawdzenie dla przykładu daje 0 punktów.

PRZYKŁADY Z WYJAŚNIENIEM

Przykład 1. (4 pkt, styczne z punktu) Z punktu $P = (3, 2)$ poprowadzono styczne do okręgu o równaniu $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$. Wyznacz równania tych stycznych.

Etap I – prosta pionowa. Dla $x = 3$: $16 + (y - 2)^2 = 8$ – brak rozwiązań, więc prosta $x = 3$ nie jest styczna. Styczne mają postać $y = a(x - 3) + 2$. ← 1 pkt

Etap II – równanie kwadratowe. $(x + 1)^2 + a^2(x - 3)^2 = 8$, czyli $(a^2 + 1)x^2 + (2 - 6a^2)x + 9a^2 - 7 = 0$. ← 1 pkt

Etap III – warunek styczności. $\Delta = (2 - 6a^2)^2 - 4(a^2 + 1)(9a^2 - 7) = 32 - 32a^2 = 0$, więc $a^2 = 1$, $a = 1$ lub $a = -1$. ← 1 pkt

Etap IV – równania. $y = (x - 3) + 2 = x - 1$ oraz $y = -(x - 3) + 2 = -x + 5$. ← 1 pkt

Przykład 2. (3 pkt, dowód) Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$. Wykaż, że przekątne AC i BD mają wspólny środek.

Etap I – wierzchołek D. W równoległoboku $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$: $[b_1 - a_1, b_2 - a_2] = [c_1 - d_1, c_2 - d_2]$, więc $D = (a_1 + c_1 - b_1, a_2 + c_2 - b_2)$. ← 1 pkt

Etap II – środki przekątnych. Środek AC: $\left(\frac{a_1 + c_1}{2}, \frac{a_2 + c_2}{2}\right)$. Środek BD: $\left(\frac{b_1 + a_1 + c_1 - b_1}{2}, \frac{b_2 + a_2 + c_2 - b_2}{2}\right)$. ← 1 pkt

Etap III – wniosek. Po uproszczeniu oba środki mają współrzędne $\left(\frac{a_1 + c_1}{2}, \frac{a_2 + c_2}{2}\right)$, więc są tym samym punktem. To należało wykazać. ← 1 pkt

Uwaga: sprawdzenie dla jednego równoległoboku o danych współrzędnych daje 0 pkt.

Jedna myśl, trzy kroki

zadania za 3 pkt: okrąg przez dwa punkty, styczna w punkcie, cięciwa, wektory, prostopadłość z parametrem, dowód o prostej i okręgu, pole trójkąta

KARTA **2/6**

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 21 pkt

Zadanie 1. Okrąg o przechodzi przez punkty $A = (0, 5)$ i $B = (6, 1)$, a jego środek leży na osi Ox. Wyznacz równanie okręgu o. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 2. Punkt $T = (3, 0)$ leży na okręgu o środku $S = (2, -4)$. Wyznacz równanie prostej stycznej do tego okręgu w punkcie T i oblicz pole trójkąta, który ta prosta tworzy z osiami układu współrzędnych. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 3. Prosta o równaniu $x + 3y = 7$ przecina okrąg o równaniu $(x - 3)^2 + (y - 8)^2 = 50$ w punktach A i B. Oblicz długość odcinka AB. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Styczne i okręgi

zadania za 3–4 pkt: punkty wspólne dwóch okręgów, okrąg styczny do osi, dowód wektorowy, styczne równoległe i z punktu, okrąg styczny do prostej, pole czworokąta

KARTA **3/6**

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 25 pkt

Zadanie 1. Oblicz współrzędne punktów wspólnych okręgów o równaniach $(x-3)^2+y^2=20$ oraz $(x+1)^2+(y-4)^2=36$. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 2. Okrąg jest styczny do osi Ox w punkcie $T=(4,0)$ i przechodzi przez punkt $P=(-2,2)$. Wyznacz równanie tego okręgu. Zapisz obliczenia. ___ / 3 pkt

Zadanie 3. Czworokąt $ABCD$ ma wierzchołki $A=(a_1,a_2)$, $B=(b_1,b_2)$, $C=(c_1,c_2)$, $D=(d_1,d_2)$. Punkty K, L, M, N są środkami boków AB, BC, CD, DA. Wykaż, że $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{NM}$. ___ / 3 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Zadania na 5 punktów

zadania za 5 pkt: styczne i pole, okrąg styczny do prostej, okręgi z parametrem, cięciwa danej długości, okręgi styczne do osi, dowód warunku styczności

KARTA **5/6**

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 30 pkt

Zadanie 1. Z punktu $P = (-2, -1)$ poprowadzono dwie styczne do okręgu o równaniu $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 20$. Punkty styczności oznaczono przez A i B. Wyznacz równania tych stycznych i oblicz pole trójkąta PAB. Zapisz obliczenia. ___ / 5 pkt

Zadanie 2. Prosta o równaniu $y = 2x - 3$ jest styczna do okręgu o w punkcie $T = (2, 1)$. Okrąg o przechodzi przez punkt $A = (11, 4)$. Wyznacz równanie okręgu o. Zapisz obliczenia. ___ / 5 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

Poziom końca arkusza

zadania za 5–6 pkt: przypadki, największe pole, pole z parametrem, styczne prostopadłe, okręgi wpisany i opisany, minimum sumy kwadratów

KARTA **6/6**

Imię i nazwisko: ..... Data: ..... Wynik: ..... / 34 pkt

Zadanie 1. Wyznacz równania wszystkich okręgów stycznych do obu osi układu współrzędnych, których środki leżą na prostej o równaniu $y = 3x + 8$. Rozważ wszystkie przypadki. Zapisz obliczenia. ___ / 5 pkt

Zadanie 2. Dany jest okrąg o o środku $S = (2, -1)$ i promieniu 5 oraz punkty $A = (-6, 1)$ i $B = (0, 9)$. Punkt C leży na okręgu o. Wyznacz współrzędne punktu C, dla którego pole trójkąta ABC jest największe, i oblicz to pole. Zapisz obliczenia. ___ / 5 pkt

Podgląd • Pierwsza Ławka

CO JESZCZE JEST W ŚRODKU

Matura 2027 matematyka PR – Geometria analityczna: okręgi, styczne, wektory – 40 zadań z kluczem i zasadami oceniania

Podgląd pokazał 7 z 43 stron. Pełna wersja: 43 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.

- 40 nowych zadań otwartych z matematyki na maturę rozszerzoną 2027 z jednego tematu: geometria analityczna: okręgi, styczne, wektory – Geometria analityczna na poziomie rozszerzonym
- Na początku ściąga: najważniejsze wzory i twierdzenia z tematu (z zaznaczeniem, co jest w karcie wzorów CKE) i wzorcowe rozwiązanie zapisane tak, jak oczekują egzaminatorzy.
- Zadania w sześciu sekcjach – od krótkich za 2–3 pkt do wieloetapowych za 5–6 pkt (razem 152 pkt), w tym zadania „Wykaż, że…”.
- Polecenia i punktacja jak w arkuszach CKE 2025–2026.
- Na końcu klucz: odpowiedzi, zasady oceniania etapami (za co kolejne punkty, uwagi w stylu CKE) i przykładowe pełne rozwiązania.
- 43 stron A4, PDF do druku i DOCX do edycji.
- Wszystkie zadania są oryginalne – nie powtarzają zadań CKE ani naszych arkuszy próbnych, zestawów i „najczęstszych zadań maturalnych”.
- Wymagania: IX.3–IX.5, IX.R1–IX.R4 (+ VIII.1, VIII.10, cel IV).
- Materiał przygotowany zgodnie z podstawą programową matematyki dla liceum i technikum (Dz.U.
- 2018 poz.
- 467 w brzmieniu Dz.U.
- 2024 poz.
- 1019), zakres rozszerzony – obowiązującą na maturze w latach 2027–2030.

Kup pełną wersję – plik od razu na e-mail

pierwszalawka.pl/material/matura-2027-matematyka-rozszerzona-geometria-analityczna-okregi-styczne-wektory-